

Gyakorló feladatok

1. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (2, 1, 3), (1, 2, 4)\}$ bázist \mathbb{R}^3 -ben. Mi a $T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ és a $T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$ áttérési mátrix? Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ vektor koordinátavektorát a \mathcal{B} bázisra nézve!
2. Ha az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$, illetve a $\mathcal{D} = \{\mathbf{b}_1, 2\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban?

3. Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban!
 - a) Az $y = x$ egyenesre való tükrözés az \mathbb{R}^2 standard \mathcal{E} , továbbá a $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$, illetve $\mathcal{C} = \{(1, 1), (-2, 0)\}$ bázisában;
 - b) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, a $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}$ bázisban;
 - c) az origón átmenő $(1, 2, -3)$ irányú egyenesre való merőleges vetítés tetszőleges, kényelmes bázisban (adjuk meg a választott bázist is).
4. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát elemi sorműveletek segítségével!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

5. Legyen A egy 5×5 -ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?
6. Számítsuk ki a következő $n \times n$ -es determináns értékét! (Ötlet: a második sort vonjuk ki az összes többiből.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

7. Számítsuk ki a

$$\begin{bmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

determináns értékét! Hogyan lehet ezt általánosítani $n \times n$ -es mátrixra? Mennyi a mátrix rangja az a, b, n értékektől függően?

Házi feladatok

Beadási határidő: december 5.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2, 0), (0, 1, 3, 2), (-1, 2, 0, 3), (1, 2, 1, 2)\}$ bázist \mathbb{R}^4 -ben. Mi a $T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ és a $T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$ áttérési mátrix? Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ vektor koordinátavektorát a \mathcal{B} bázisra nézve!
2. Ha az $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, -\mathbf{b}_3\}$ bázisban?

3. Írjuk fel az $f(x, y, z) = (x - y + z, -2x + z, x + y)$ lineáris transzformáció standard mátrixát, és a $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (2, -1, 2), (0, 1, 1)\}$ bázis szerinti mátrixát!
4. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Legyenek az $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix oszlopai rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, és tegyük fel, hogy $\det A = 4$, míg egy másik $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix determinánsa -3 . Mi a determinánsa a következő mátrixoknak?
 - a) $2A^T$
 - b) $(3A)^{-1}B^4$
 - c) $[\mathbf{b} \mid \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \mid 3\mathbf{c}]$
6. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg A determinánsát! Hogyan lehet ezt általánosítani $n \times n$ -es mátrixra? (Ötlet: adjuk az összes sort az elsőhöz, utána vonjuk ki minden oszlopból az előzőt, hátulról előrefelé.)

- 7*. Bizonyítsuk be, hogy K^n minden lineáris transzformációjához van K^n -nek olyan bázisa, amelyben a transzformáció mátrixának első oszlopában legfőljebb egy nemnulla elem van, és az az első vagy a második elem. Mutassunk példát \mathbb{R}^2 -ben olyan transzformációra, amelynek a kettő közül csak az egyik, illetve csak a másik típusú mátrixa van.