Bevezetés az algebrába 1 **2. zh** 2022. november 18.

Munkaidő: 60 perc

1. *Bontsuk fel irreducibilis polinomok szorzatára az* $f(x) = 2x^5 - 6x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ *polinomot* $\mathbb{Q}[x]$*-ben!* *(3 pont)*

Megoldás: f lehetséges racionális gyökei: $\frac{p}{q}$, ahol $p \mid 1$, $q \mid 2$, azaz $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm\frac{1}{2}$.
$f(1) = -4 \neq 0$.

	2	0	-6	-3	2	1
-1	2	-2	-4	1	1	0
-1	2	-4	0	1	0	

Tehát $f(x) = (x-1)^2(2x^3 - 4x^2 + 1)$, ahol a harmadfokú tényező is irreducibilis a fordított Sch.–E. kritérium miatt ($p = 2$-vel).
(Mivel ez a tényező csak harmadfokú, az irreducibilitását azzal is lehet bizonyítani, hogy nincs racionális gyöke: ellenőrizzük, hogy -1 és $\pm\frac{1}{2}$ közül egyik sem gyök.)

2. *Adjunk meg olyan* $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *legföljebb másodfokú polinomot, amely a* $0, 1, -1$ *helyeken ugyanazt az értéket veszi föl, mint az* $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 1$. *(3 pont)*

Megoldás: I. megoldás: Ha $f(x)$-et elosztjuk maradékosan az $x(x-1)(x+1) = x^3 - x$ polinommal, akkor a maradéknak ugyanazok lesznek a helyettesítési értékei a $0, 1, -1$ helyen, mint f-nek, és a foka kisebb 3-nál.

$$
\begin{array}{rrrrr}
(x^4 & -3x^3 & +x^2 & +x & -1) : (x^3 - x) \; = x - 3 \\
-(x^4 & & -x^2) & & \\
\hline
 & -3x^3 & +2x^2 & +x & -1 \\
 & -(-3x^3 & & +3x) & \\
\hline
 & & 2x^2 & -2x & -1
\end{array}
$$

Tehát $2x^2 - 2x - 1$ a keresett polinom.
II. megoldás:

x	0	1	-1
$f(x)$	-1	-1	3

Mivel $0, 1$-ben első pillantásra látjuk, hogy a konstans -1 polinom interpolál, csak a -1-beli helyettesítési értéket kell még biztosítani Newton-interpolációval: $g(x) = -1 + Ax(x-1)$, -1-ben: $3 = -1 + 2A \Rightarrow A = 2 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - 2x - 1$.

3. *Írjuk fel azt az* 1 *főegyütthatós polinomot, amelynek gyökei* ab, ac *és* bc, *ha* a, b, c *az* $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ *polinom gyökei!* *(4 pont)*

Megoldás: $x^3 + 2x^2 - 4x + 2 = (x-a)(x-b)(x-c) \Rightarrow$
$a + b + c = -2,\;\; ab + ac + bc = -4,\;\; abc = -2$.
A keresett polinom
$(x - ab)(x - ac)x - bc) = x^3 - (ab + ac + bc)x^2 + (a^2bc + b^2ac + c^2bc)x - a^2b^2c^2$,
aminek az együtthatói a fentiek miatt $-(ab+ac+bc) = 4$, $abc(a+b+c) = 4$ és $-(abc)^2 = -4$.
Vagyis a keresett polinom $x^3 + 4x^2 + 4x - 4$.

4. *Hány megoldása van az alábbi kibővített mátrixú $\mathbb{Z}_3$ fölötti egyenletrendszernek az a és b paramétertől függően? Soroljuk is fel a megoldásokat $a = b = 1$ esetén!* *(4 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & a & 0 & a & | & b \\ 0 & 0 & b & a & | & a \end{bmatrix}$$

Megoldás: Ha $a \neq 0$, akkor a mátrix mindenképpen lépcsős alakú, 3 nemnulla sorral, csak $b \neq 0$ esetén a negyedik, $b = 0$ esetén a harmadik lesz a szabad változó. Az egyenletrendszer konzisztens, mert minden sorban van vezérelem. Tehát ekkor $3^1 = 3$ megoldás van.
Ha $a = 0$ és $b = 0$, akkor is lépcsős a mátrix, egyetlen nemnulla sorral, és nincs ellentmondásos sora, továbbá $4 - 1 = 3$ szabad változója van, így a megoldások száma $\mathbb{Z}_3$ fölött $3^3 = 27$.
Ha $a = 0$, de $b \neq 0$, akkor a második sor ellentmondásos, tehát nincs megoldás.
$a = b = 1$ esetén Gauss-eliminációval a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, tehát az általános megoldás $\mathbf{x} = (-1, 1-t, 1-t, t)$ $(t \in \mathbb{Z}_3)$, azaz a megoldások $(-1,1,1,0)$, $(-1,0,0,1)$ és $(-1,-1,-1,-1)$.

5. *Hány dimenziós az $\mathbf{a} = (1,2,1,-1)$, $\mathbf{b} = (2,1,1,1)$ és $\mathbf{c} = (0,-3,-1,3)$ vektorok által kifeszített V altér $\mathbb{R}^4$-ben? Adjuk meg a V egy $\mathcal{B}$ bázisát, és az $\mathbf{u} = (0,1,-1,3)$ és $\mathbf{w} = (-1,4,1,-5)$ vektorok közül annak a koordinátavektorát $\mathcal{B}$-re nézve, amely benne van V-ben!* *(4 pont)*

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & | & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & | & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & | & 3 & -5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & | & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & | & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & | & 3 & -6 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & | & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & | & 3 & -6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Itt az együtthatómátrix lépcsős alakú. Ebből leolvasható, hogy $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \,\}$ bázisa V-nek, $\mathbf{u} \notin V$ és $\mathbf{w} \in V$. Azt, hogy $\mathbf{w}$ hogy áll elő $\mathcal{B}$ lineáris kombinációjaként az 1., 2. és 6. oszloppal mint kibővített mátrixszal megadott egyenletrendszer lépcsős alakjából látjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \quad \text{azaz} \quad [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

6. *Mi az alábbi mátrix rangja, ha $\mathbb{Q}$, illetve ha $\mathbb{Z}_2$ fölöttinek tekintjük?* *(2 pont)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $\mathbb{Z}_2$ fölött ránézésre is látszik, hogy 1 rangú a mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oszloptere $\operatorname{span}((1,1,1))$.
$\mathbb{Q}$ fölött lépcsős alakra hozzuk:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a rangja $\mathbb{Q}$ fölött 2.