E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **1. vizsga – gyakorlat** **2022-12-21**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc.

E1. Hány megoldása van a $15x \equiv 8 \pmod{33}$ kongruenciának?

0

E2. Mi a komplex 60-adik primitív egységgyökök száma?

16

E3. Írjuk fel az $(x^8 - 1)/(x^2 - 1)$ hányadost körosztási polinomok szorzataként!

$\Phi_4(x)\Phi_8(x)$

E4. Adjunk meg olyan $c \in \mathbb{Z}$ számot, hogy az $f(x) = x^4 - 4x + c$ polinom irreducibilis legyen $\mathbb{Q}[x]$-ben, de reducibilis legyen $\mathbb{Z}_3[x]$-ben!

Pl. $c = 6$

E5. Mi az inverziók száma az 5 3 2 1 6 4 permutációban?

8

E6. Változtassunk meg egyetlen elemet az alábbi mátrixban úgy, hogy az új mátrix ne legyen invertálható!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pl. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

E7. Mi a rangja (azaz a képterének a dimenziója) annak a lineáris transzformációnak, amely az $\mathbb{R}^3$ vektorait először az xy-síkra, majd a kapott vektort az xz-síkra vetíti merőlegesen?

1

E8. Írjuk fel az alábbi (redukált lépcsős alakú) mátrix nullterének bázisát!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\{(1,0,0,0), (0,1,1,0)\}$

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 8 \\ x &\equiv 2 \pmod 5 \\ x &\equiv -1 \pmod 7 \end{aligned}$$

$x \equiv 27 \pmod{280}$

2. Oldjuk meg az $(1+2i)z^3 = 3+i$ egyenletet a komplex számok körében! Melyik síknegyedbe nem esik megoldás?

$z = \sqrt[6]{2}(\cos(-\frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{12}+k\cdot\frac{2\pi}{3}))$
$= \sqrt[6]{2}(\cos(-15°+k\cdot 120°)+i\sin(-15°+k\cdot 120°))$
$(k = 0, 1, 2)$
A szögek: $-15°,\ 105°,\ 225°.$ $\Rightarrow$
Az első síknegyedbe nem esik megoldás.

3. Számítsuk ki az $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ és $g(x) = x^3 + 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és írjuk fel ezt $f(x)a(x) + g(x)b(x)$ alakban!

$(f, g) = x^2 - x + 1$
$x^2 - x + 1 = 1\cdot(x^4 + x^2 + 1) - x\cdot(x^3 + 1)$
(Más előállítás is van.)

4. Bontsuk fel irreducibilis tényezők szorzatára az $f(x) = 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - x - 1$ polinomot $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben!

$\mathbb{Q}[x]$-ben: $(x+1)(2x-1)(2x^2+2x+1)$
$\mathbb{C}[x]$-ben: $4(x+1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)$

5. A c paraméter értékétől függően hány megoldása van az alábbi kibővített mátrixszal megadott egyenletrendszernek $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}_2$ fölött?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & c & 3 \end{array}\right]$$

$\mathbb{Q}$ fölött:	$c \neq 2$-re	1 mo.
	$c = 2$-re	0 mo.
$\mathbb{Z}_2$ fölött:	$c = 1$-re	2 mo.
	$c = 0$-ra	4 mo.

6. Határozzuk meg az alábbi A mátrix rangját, oszlopterének egy bázisát, és (az A bázisfelbontásának segítségével) írjuk fel A-t $r(A)$ darab egy rangú mátrix összegeként!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2$. $\mathcal{O}(A)$ bázisa $\{(1,1,1), (2,1,-1)\}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Adjuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixát a standard és a $\mathcal{B}$ bázisban, ha
$f(x, y, z) = (x - z, y + 2z, x + y + z)$
és $\mathcal{B} = \{(1,0,1),\ (1,2,0),\ (0,-1,1)\}$.

$$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ [f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

8. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális közelítő megoldását!

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ x + z &= 1 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

Normálegyenlet: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$.
Ennek sortérbe eső (és így legkisebb abszolút értékű) megoldása az eredeti egyenletrendszer legkisebb absz. értékű optimális közelítő megoldása: $\frac{2}{3}(2,1,1)$