

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 1

1. vizsga – elmélet

2021-12-20

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc.

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! (6 pont)

a) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ minden $a, b \in \mathbb{N}^+$ -ra, ha φ az Euler-féle függvény.

b) Minden komplex n -edik egységgyök primitív m -edik egységgyök valamilyen m -re.

c) Ha egy $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ nem konstans polinomnak nincs gyöke \mathbb{Q} -ban, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

d) Egy 3 egyenletből álló 4 ismeretlenes valós lineáris egyenletrendszernek mindig végtelen sok megoldása van.

e) Ha $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mindegyike 1 rangú, akkor $A + B$ nem invertálható.

f) Ha az A mátrix sorekvivalens B -vel (azaz B -t elemi sorműveletekkel kapjuk A -ból), akkor $\mathcal{O}(A) = \mathcal{O}(B)$.

2. Adjunk meg egy olyan $c \in \mathbb{Z}$ számot, hogy $\{13, 25, -5, c\}$ redukált maradékrendszer legyen modulo 8. (2 pont)

3. Melyik test az alábbiak közül?
 $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Q}[x], \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{R}$ (2 pont)

4. Ha $z \in \mathbb{C}$ egyik negyedik gyöke $1 - 2i$, akkor mi a másik három negyedik gyök? (2 pont)

5. Adjunk meg egy olyan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomot, amely irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ -ben, de nem irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$ -ben. (2 pont)

6. Milyen intervallumba eshet az \mathbf{ab} skalárszorzat értéke, ha az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorok abszolút értéke 2 és 5? (2 pont)

7. Hányszor hányas az A valós mátrix, ha $\dim \mathcal{N}(A) = 3$, és $\mathcal{O}(A)$ az \mathbb{R}^4 kétdimenziós altere? (2 pont)

8. Mi a determinánusa az alábbi A mátrixnak?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$
(2 pont)

9. Mondjuk ki a Dirichlet-féle approximációs tételt!

(3 pont)

10. Mit jelent az, hogy egy $f(x) \in K[x]$ polinom irreducibilis $K[x]$ -ben?

(2 pont)

11. Adjuk meg egy $A \in K^{n \times n}$ mátrix invertálhatóságának három ekvivalens feltételét (a definíció is köztük lehet)!

(3 pont)

12. Definiáljuk egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés képterét és magterét!

(2 pont)

13. Bizonyítsuk be, hogy \mathbb{N} -ben minden felbonthatatlan szám prím!

(4 pont)

14. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Cramer-szabályt!

(6 pont)