E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **1. vizsga – gyakorlat** **2022-12-21**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc.

E1. Hány megoldása van a $15x \equiv 8 \pmod{33}$ kongruenciának?

E2. Mi a komplex 60-adik primitív egységgyökök száma?

E3. Írjuk fel az $(x^8 - 1)/(x^2 - 1)$ hányadost körosztási polinomok szorzataként!

E4. Adjunk meg olyan $c \in \mathbb{Z}$ számot, hogy az $f(x) = x^4 - 4x + c$ polinom irreducibilis legyen $\mathbb{Q}[x]$-ben, de reducibilis legyen $\mathbb{Z}_3[x]$-ben!

E5. Mi az inverziók száma az 5 3 2 1 6 4 permutációban?

E6. Változtassunk meg egyetlen elemet az alábbi mátrixban úgy, hogy az új mátrix ne legyen invertálható!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

E7. Mi a rangja (azaz a képterének a dimenziója) annak a lineáris transzformációnak, amely az $\mathbb{R}^3$ vektorait először az xy-síkra, majd a kapott vektort az xz-síkra vetíti merőlegesen?

E8. Írjuk fel az alábbi (redukált lépcsős alakú) mátrix nullterének bázisát!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 8 \\ x &\equiv 2 \pmod 5 \\ x &\equiv -1 \pmod 7 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg az $(1+2i)z^3 = 3+i$ egyenletet a komplex számok körében! Melyik síknegyedbe nem esik megoldás?

3. Számítsuk ki az $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ és $g(x) = x^3 + 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és írjuk fel ezt $f(x)a(x) + g(x)b(x)$ alakban!

4. Bontsuk fel irreducibilis tényezők szorzatára az $f(x) = 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - x - 1$ polinomot $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben!

5. A c paraméter értékétől függően hány megoldása van az alábbi kibővített mátrixszal megadott egyenletrendszernek $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}_2$ fölött?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & c & 3 \end{array}\right]$$

6. Határozzuk meg az alábbi A mátrix rangját, oszlopterének egy bázisát, és (az A bázisfelbontásának segítségével) írjuk fel A-t $r(A)$ darab egy rangú mátrix összegeként!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

7. Adjuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixát a standard és a $\mathcal{B}$ bázisban, ha
$f(x,y,z) = (x - z, y + 2z, x + y + z)$
és $\mathcal{B} = \{(1,0,1),\ (1,2,0),\ (0,-1,1)\}$.

8. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális közelítő megoldását!

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ x \phantom{{}+2y} + z &= 1 \\ x + y \phantom{{}-z} &= 4 \end{aligned}$$