Gyakorló feladatok

1. Hány olyan egész szám van 1 és 4000 között, amely sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható?

2. Horner-módszerrel helyettsítsük be 5-öt a $p(x) = x^5 - 3x^2 + x + 3$ polinomba!

3. Adjuk meg 120201_3-at tízes számrendszerben Horner módszerrel!

4. a) Váltsuk át 26-ot $10, 16, 8, 4, 2, 5, 26$ alapú számrendszerbe!
b) Váltsuk át 1001-et 2-es, 8-as és 16-os számrendszerbe!

5. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal $(288, 204)$-et, és állítsuk elő a legnagyobb közös osztót $288x + 204y$ alakban alkalmas $x, y \in \mathbb{Z}$-vel!

6. Megoldhatók-e az alábbi diofantoszi egyenletek? Ha igen, adjuk meg az összes megoldásukat, illetve az összes nemnegatív megoldásukat!
a) $288x + 204y = 182$
b) $288x + 204y = 3000$

7. Ha $(a, b) = 5$, mi lehet $(3a - b, a + b)$? Adjunk is példát mindegyik esetre!

8. Bizonyítsuk be, hogy minden $a > 1$, $m, n \geq 1$ egész számra $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

Házi feladatok

Beadási határidő: szeptember 18.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Adjuk meg az 2023 szám 8-as, ebből a 2-es, és abból a 16-os számrendszerbeli alakját! Írjuk fel a 12001_3 számot 9-es és 10-es számrendszerben!

2. Tekintsük a 47123 számsorozatot b-es számrendszerbeli számnak a legkisebb olyan b-re, amire még értelmes, azaz a számjegyei lehetnek egy b-es számrendszerbeli szám számjegyei. Váltsuk át a kapott számot 10-es számrendszerbe, és erre ismételjük meg a feladatot addig, amíg már nincs változás! Mi a végső szám?

3. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal $(324, 276)$ értékét, és keressünk olyan x és y egész számokat, melyekre $324x + 276y = (324, 276)$.

4. Írjuk fel a $155x+195y = 5000$ diofantoszi egyenlet általános megoldását! Hány 155 forintos és hány 195 forintos árut vásároltunk, ha épp 5000 forintot fizettünk? (Ebben az esetben $x, y \geq 0$.)

5. Mi lehet a $(2a+b,\ a-b)$ legnagyobb közös osztó értéke, ha $a, b \in \mathbb{Z}$, és $(a, b) = 1$. Mindegyik esetre adjunk példát is!

6. Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos Fibonacci-számok relatív prímek!

7*. A Nim nevű játékot néhány kupac gyufaszállal játssza két játékos. Felváltva elvesznek néhány (legalább egy, de akár az összes) gyufaszálat az egyik kupacból. Az nyer, akié az utolsó gyufaszál. Adott méretű kupacok mellett melyik játékosnak van nyerő stratégiája? (Útmutatás: írjuk fel a kupacok méretét binárisan, majd e számokat írjuk egymás alá helyiérték szerint. Igazoljuk, hogy a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha minden helyiértéken páros az 1-esek száma.)