

Gyakorló feladatok

1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $(a, b) = 1$, és a és b is osztója c -nek, akkor ab is osztója c -nek.
b) Bizonyítsuk be, hogy a, b pozitív egészekre $\frac{ab}{(a,b)}$ az a és b kitüntetett közös többszöröse, azaz többszöröse a -nak és b -nek, és minden más közös többszörösüknek osztója.
2. Mutassuk meg, hogy
 - a) $4k + 1$ alakú számok szorzata $4k + 1$ alakú;
 - b) végtelen sok $4k + 3$ alakú prímszám van! (Útmutatás: Milyen prímosztói lehetnek a $4n! - 1$ számnak?)
3. A páros számok körében definiált oszthatóságra nézve mely számok írhatók fel lényegében egyértelműen felbonthatatlanok szorzataként?
4. a) Mi a 2 kitevője $17!$ kanonikus alakjában?
b) Hány nullára végződik a $100!$ szám?
5. Bizonyítsuk be, hogy $n, a, b \in \mathbb{N}^+$ -ra $\left[\frac{n}{ab} \right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{a} \right]}{b} \right]$.
6. Határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!
 - a) $2^{23}3^{10}7^{13}, 2^{15}7^{10}13^5$
 - b) $2^{23}3^{10}7^{13}, 2^{15}7^{10}13^5, 3^{15}7^{20}11^2$.
7. Határozzuk meg $2^{67} \bmod 71$ értékét!
8. Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciákat!
 - a) $12x \equiv 15 \pmod{21}$
 - b) $12x \equiv 4 \pmod{6}$
 - c) $12x \equiv 4 \pmod{2}$
 - d) $30x \equiv 4 \pmod{37}$
9. a) Határozzuk meg $5^{-1} \bmod 26$ értékét!
b) Invertálható-e 4 modulo 26?

Házi feladatok

Beadási határidő: szeptember 25.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Mutassuk meg, hogy $n! + 1$ -nek minden prímosztója n -nél nagyobb ($n \in \mathbb{N}^+$)! Vezessük le ebből, hogy végtelen sok prímszám van!
2. Bizonyítsuk be, hogy minden $a, b > 1$ egész számra

$$[a, b] \mid a + b \Leftrightarrow a = b.$$

3. Hány 0-ra végződik az $1234!$ szám?
4. Számítsuk ki $25^{105} \bmod 11$ értékét!
5. Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciákat!
 - a) $4x \equiv 6 \pmod{14}$,
 - b) $4x \equiv 6 \pmod{16}$,
 - c) $4x \equiv 8 \pmod{16}$.
6. Számítsuk ki $3^{-1} \bmod 13$, $3^{-1} \bmod 26$ és $3^{-1} \bmod 52$ értékét!
- 7*. Adott $m \in \mathbb{N}^+$ -ra határozzuk meg az összes olyan b egész számot, amelyre

$$\{t_1 + b, t_2 + b, \dots, t_{\varphi(m)} + b\}$$

redukált maradékrendszer modulo m , ha $\{t_1, t_2, \dots, t_{\varphi(m)}\}$ redukált maradékrendszer modulo m !