Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsuk be Wilson tételét: $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ minden p prímre.

2. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 8 \\ x &\equiv -4 \pmod{11} \end{aligned}$$

3. Határozzuk meg az alábbi értékeket:
a) $\varphi(23)$, $\varphi(21)$, $\varphi(63)$, $\varphi(10!)$,
b) 120^{24} mod 23, 115^{21} mod 21, 68^{111} mod 63, 111^{68} mod 63. Vigyázzunk, 111 nem relatív prím a 63-hoz!
c) $3^{3^{3^4}}$ utolsó két számjegye.

4. Készítsük el a $\mathbb{Z}_5$ és $\mathbb{Z}_6$ gyűrűk összeadás- és szorzástábláját!
Készítsük el a mod6 redukált maradékosztályok csoportjának, $\mathbb{Z}_6^*$-nak a szorzástábláját!

5. Adjuk meg az alábbi komplex számok algebrai alakját:
a) $(3-4i)(7+8i)$ b) $(3-4i)/(2-i)$ c) i^{199} d) $(1+i)^9$

6. Legyen $z = 1+3i$ és $u = 2-i$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:
a) $z\bar{z}$ b) $u/\bar{u}$ c) $|z-u|$ d) $|2z-zu|$ e) $|u/z\bar{u}^3|$.

7. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z^2 + 2iz - 1 + i = 0$$

egyenletet!

8. Mi a mértani helye a síkon azon pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:
a) $|z-5+i| = 2$ b) $|z-i| = |z+i|$ c) $|(z-3+4i)/(z-i)| \geq 1$
d) $|z| = 3iz$ e) $|z| = iz$ f) $z + \overline{z} < 4$.

Házi feladatok

Beadási határidő: október 2.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Egyszerűsítsük a 356^{365} mod 175 hatványt az Euler–Fermat-tétel segítségével (indokoljuk is, miért használható erre az E–F.-tétel), majd számoljuk ki az értékét!

2. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{13} \\ x &\equiv 1 \pmod{4} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

3. Készítsük el a modulo 12, illetve modulo 8 redukált maradékosztályok csoportjának, $\mathbb{Z}_{12}^*$-nak és $\mathbb{Z}_8^*$-nak a szorzástábláját!

4. Határozzuk meg a $(3+i)^{20}$ és a $\dfrac{(2+5i)^{101}}{(2-5i)^{99}}$ komplex szám **abszolút értékét**!

5. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z^2 + 4iz - 3 = 0$$

egyenletet!

6. Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:

a) $|z - 1 + i| > 1$

b) $z - \overline{z} = 2i$

7*. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n, m \in \mathbb{N}^+$-ra $\varphi(n^2) = \varphi(m^2)$, akkor $n = m$. Adjuk meg azt az n-et, amelyre $\varphi(n^2) = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 7$.