Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg $x^3 - 2x^2 + x - 1$ és $x^2 + 2$ legnagyobb közös osztóját, és állitsuk elő a legnagyobb közös osztót ezen polinomok polinomegyütthatós lineáris kombinációjaként a kibővített euklideszi algoritmus segítségével!

2. Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit, és bontsuk fel a polinomokat irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_5[x]$-ben!
a) $2x^3 - 7x^2 + 2$
b) $x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$
c) $x^5 + 1$

3. Adjuk meg $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött az irreducibilis másodfokú polinomokat!

4. Adjuk meg azt a legalacsonyabb fokú 1 főegyütthatós
a) komplex együtthatós
b) valós együtthatós
polinomot, amelynek i kétszeres, 1 háromszoros gyöke!

5. Határozzuk meg az $(x-2)^2(x+i)^5(x-3)(x-4)^2$ és az $(x-2)(x+i)^2(x-3)^3$ polinomok legnagyobb közös osztóját!

6. Mutassuk meg, hogy páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke!

7. Határozzuk meg az a együtthatót úgy, hogy -1 legalább kétszeres gyöke legyen az

$$x^5 - ax^2 - ax + 1$$

polinomnak!

8. Adjuk meg az alábbi polinomok komplex gyöktényezős alakját!
a) $x^3 - 1$
b) $x^n + 1$
c) $x^4 + x^2 + 1$

9. Mutassuk meg, hogy egy racionális együtthatós, $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis polinomnak nem lehet $\mathbb{C}$-ben többszörös gyöke!

Házi feladatok

Beadási határidő: október 16.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 2$ és $g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és állítsuk elő a legnagyobb közös osztót $u(x)f(x) + v(x)g(x)$ alakban a kibővített euklideszi algoritmus segítségével!

2. Bontsuk fel az $x^8 - 1$ polinomot $\mathbb{C}$, illetve $\mathbb{R}$ fölött irreducibilis polinomok szorzatára!

3. Határozzuk meg az összes irreducibilis harmadfokú polinomot $\mathbb{Z}_2$ fölött!

4. Határozzuk meg azokat a $c \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az $x^3 + 2x^2 + cx + 4$ polinomnak van racionális gyöke!

5. Bontsuk fel az $f(x) = 6x^5 + 9x^4 + 2x^3 - 1$ polinomot $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_7[x]$-ben irreducibilis tényezők szorzatára!

6. Legyen K test, és tegyük fel, hogy $f, g \in K[x]$, $\deg f = 3$, $\deg g = 2$, és $(f, g) \neq 1$. Lássuk be, hogy ekkor f-nek van gyöke K-ban!

7*. Keressük meg az összes egységet (azaz invertálható elemet) $\mathbb{Z}_4[x]$-ben!