Gyakorló feladatok

1. Hány irreducibilis tényező szorzatára bomlik az $f(x) = -6x^3 + 6x^2 - 12$ polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, $\mathbb{Z}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben, illetve $\mathbb{C}[x]$-ben?

2. Határozzuk meg az $f(x) = -6x^3 + 6x^2 - 12$ és a $g(x) = 3x^2 - 3x - 6$ polinomok legnagyobb (azaz kitüntetett) közös osztóját $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}[x]$-ben!

3. Irreducibilis-e az $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3$ polinom $\mathbb{R}$ fölött, $\mathbb{Q}$ fölött és $\mathbb{Z}_2$ fölött?

4. Bontsuk fel a

$$2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$$

polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_5[x]$-ben!

5. Határozzuk meg az $x^3 + 3x^2 + 9x + 5$ polinom gyökeit a Cardano-képlet segítségével!

6. Lássuk be, hogy ha p páratlan prím, akkor $\Phi_{2p}(x) = \Phi_p(-x)$, és bizonyítsuk be ennek a polinomnak az irreducibilitását!

7. Tekintsük a $\Phi_{12} = x^4 - x^2 + 1$ körosztási polinomot.
  a) Bizonyítsuk be, hogy $\Phi_{12}(ax + b)$ semelyik $a, b \in \mathbb{Z}$-vel ($a \neq 0$) nem teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritériumot!
  b) Bizonyítsuk be, hogy $x^4 - x^2 + 1$ reducibilis minden $\mathbb{Z}_p$ fölött!
  c) Lássuk be $\Phi_{12}(x)$ irreducibilitását más módszerrel!

8. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, és $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor $a - b \mid f(a) - f(b)$.
  b) Keressünk olyan egész együtthatós polinomot, amelyre $\{ f(-2), f(1), f(3) \} = \{ 2, 6, 11 \}$ (nem feltétlenül ebben a sorrendben)!

9. Legyenek a, b, c az $x^3 - 2x^2 + 4x + 6$ polinom gyökei $\mathbb{C}$-ben. Adjunk meg egy harmadfokú polinomot, amelynek gyökei $a + b$, $a + c$ és $b + c$. (Ne számítsuk ki a gyököket, használjuk a gyökök és együtthatók közti összefüggéseket!

Házi feladatok

Beadási határidő: október 24.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Oldjuk meg Cardano-képlettel az $x^3 + 12x - 12 = 0$ egyenletet!

2. Bontsuk fel az $f(x) = x^6 - 7x^4 + 12x^2 + 2x - 4$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_5[x]$-ben!

3. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^3 + 2x + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, de semelyik $a \in \mathbb{Z}$ számmal nem teljesíti az $f(x + a)$ polinom a Schönemann–Eisenstein-kritériumot!

4. Számítsuk ki a $\Phi_9(x)$ körosztási polinomot, és bizonyítsuk be, hogy $\Phi_9(x)$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben!

5. Adjuk meg azt a legkisebb fokú racionális együtthatós $f(x)$ polinomot, amelyre $f(0) = f(1) = f(2) = 2$, és $f(-1) = 5$.

6. Legyen a, b, c az $2x^3 - x^2 + 3x + 6$ polinom három gyöke $\mathbb{C}$-ben. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:
a) $a + b + c$
b) abc
c) $a^2 + b^2 + c^2$

7*. Határozzuk meg azokat a $c \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az $x^3 + 5x^2 + 2cx + c$ polinomnak van racionális gyöke!