Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $x + 3y + z = 2$ és $x + 2y + 2z = 5$ egyenletű síkok metszetét! Ha a metszet egyenes, adjuk meg az egyenes explicit (paraméteres) egyenletét vektorosan és koordinátánként is!

2. Adjuk meg a $2x - y + z = 1$ sík explicit egyenletét, illetve egyenletrendszerét: oldjuk meg az egyenletet, mint egy egy egyenletből álló egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vektorosan és koordinátánként is!

3. Legyen $\mathbf{a} = (1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 2, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Lássuk be, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függetlenek. A $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0)$ és $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ vektorok közül azt amelyiket lehet, állítsuk elő az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként!

4. Oldjuk meg az alábbi két egyenletrendszert! Mit jelent a megoldásuk a sormodellben és az oszlopmodellben?

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 2y & - & z & = & -1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}$$

5. Válasszunk ki az A mátrix oszlopai közül egy maximális független vektorhalmazt, és írjuk fel a többi vektort ezek lineáris kombinációjaként! Adjuk meg A sorterének és nullterének is egy-egy bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Az $\mathbb{R}^3$ alábbi részhalmazai közül melyik altér, illetve affin altér? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát, amelyik nem altér, de affin altér, azt adjuk meg $\mathbf{u} + V$ alakban, ahol V altér!

a) $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1\}$ b) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\}$ c) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 1\}$

7. Bizonyítsuk be, hogy két altér metszete mindig altér, de két altér uniója csak akkor altér, ha az egyik altér tartalmazza a másikat!

8. Mi lehet a redukált lépcsős alakja az $A = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3] \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ mátrixnak, ha $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$, de $\mathbf{a}_1 \notin \operatorname{span}(\mathbf{a}_3)$?

Házi feladatok

Beadási határidő: november 6.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg a $2x - y + 3z = 3$, $x + y + z = 4$, $3y - z = 5$ egyenletű síkok metszetét. Ha a metszet egyenes, akkor adjuk meg az egyenes paraméteres egyenletét vektorosan és koordinátánként is!

2. Egy valós lineáris egyenletrendszernek megoldása $(1, 0, -1, 1)$ és $(2, 3, 1, 0)$ is. Adjuk meg ennek az egyenletrendszernek végtelen sok különböző megoldását!

3. Altér-e, illetve affin altér-e $\mathbb{R}^3$-ben a következő? Indokoljuk a választ!

a) Az xy sík és a z tengely uniója;
b) az $x - 2y + z = 2$ egyenletű sík;
c) az $x = 4 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = -6 - 3t$ egyenletrendszerrel megadott egyenes.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert! Mit jelent a megoldása a sormodellben és az oszlopmodellben?

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ x & + & 4y & + & -z & = & 7 \end{array}$$

5. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} = (1, 1, 0, -2)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 1, 1)$ és $\mathbf{c} = (1, 4, 1, -3)$ vektorok $\mathbb{R}^4$-ben? Írjuk fel, amelyiket lehet a $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ és $\mathbf{w} = (-1, 5, 2, 0)$ vektorok közül az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

6. Legyenek egy $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ mátrix oszlopai $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$, és A redukált lépcsős alakja

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg az $\{\, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \,\}$ olyan részhalmazát, amely bázisa az A oszlopterének, és fejezzük ki a többi oszlopot ezek lineáris kombinációjaként a redukált lépcsős alak alapján. Adjunk meg olyan A mátrixot, amelynek R a redukált lépcsős alakja, és nincs egyetlen 0 eleme sem.

7*. a) Hány $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ független vektorpár van egy kétdimenziós, illetve háromdimenziós $\mathbb{Z}_3$ fölötti vektortérben?
b) Hány egy-, illetve kétdimenziós altere van $\mathbb{Z}_3^3$-nek?