## Gyakorló feladatok

**1.** Legyen $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,2,-1),(1,1,0)\}$.
a) Lássuk be, hogy $\mathcal{B}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben!
b) Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1,0,0)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!
c) Melyik az a $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vektor, amelynek koordinátavektora a $\mathcal{B}$ bázisra nézve
$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$?

**2.** Mennyi a rangja annak a valós $n \times n$-es mátrixnak, amelynek az elemei sorfolytonosan leolvasva $1, 2, \ldots, n^2$?

**3.** Mennyi lehet annak az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek a rangja, amelyre $0 \neq \operatorname{Im} f \leq \operatorname{Ker} f$? Adjunk példát ilyen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezésre!

**4.** Tekintsük a következő mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki a $BC$, $CB$, $5A$, $A+D$, $AD$, $DA$, $D^TD + A$ mátrixkifejezések közül azokat, amelyek értelmezve vannak!

**5.** Keressünk olyan $2 \times 2$-es és $3 \times 3$-as $C$ valós mátrixokat, melyekre: $C^2 = 0$, de $C \neq 0$.

**6.** Mi történik egy $n \times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixokkal megszorozzuk?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

## Házi feladatok

Beadási határidő: november 13.

*A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!*

**1.** Válasszuk ki az alábbi $A$ mátrix oszlopterének egy bázisát az oszlopok közül, és írjuk fel mind az öt oszlop koordinátavektorát erre a bázisra nézve! Lehet-e más bázist is kiválasztani az oszlopok közül?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

**2.** Az 1. feladat $A$ mátrixára adjuk meg $A$ sorterének, nullterének és $A^T$ nullterének is egy-egy bázisát!

**3.** Mennyi lehet annak az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek a rangja, amelyre $0 \neq \operatorname{Ker} f \leq \operatorname{Im} f$? Adjunk példát ilyen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezésre!

**4.** Határozzuk meg az alábbi $A$ mátrix rangját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix}$$

**5.** Összesen legalább hány nemnulla eleme van az $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixoknak, ha $AB$-ben nincs nulla elem?

**6.** Keressük meg az összes olyan $2 \times 2$-es valós $X$ mátrixot, amelyik felcserélhető az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal! (Írjuk át az $AX = XA$ mátrixegyenletet az $X$ elemeire vonatkozó lineáris egyenletrendszerré!)

**7*.** Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in K^{n\times n}$, és $r(A) < n$, akkor van olyan $X \in K^{n\times n}$ mátrix, amelyre $r(X) = 1$, és $AX = XA$. (Még olyan 1 rangú $X$ is van, hogy $AX = XA = 0$.) Lássuk be, hogy $r(A) = n$ esetén ez nem feltétlenül igaz, pl. az $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra sem.