Gyakorló feladatok

1. Sorműveletek nélkül, csak inverziószámolással határozzuk meg az alábbi kígyók determinánsát!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat minél egyszerűbben!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c+d & c^2+d^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

4. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját! Keressünk benne a rangnak megfelelő méretű nemnulla aldeterminánst!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Cramer szabály alkalmazásával oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Határozzuk meg az A mátrix LU-felbontását! Számítsuk ki ebből az A determinánsát és az $A\mathbf{x} = [1\ \ -1\ \ 0]^T$ egyenletrendszer megoldását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Adjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 6 \end{array}$$

valós egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, és ennek felhasználásával írjuk fel az összes megoldást!

8. Határozzuk meg az $x - y = 1,\ x - y = 2$ ellentmondásos lineáris egyenletrendszer optimális közelítő megoldásait normálegyenlet segítségével! Határozzuk meg az egyetlen sortérbe eső (minimális abszolútértékű) optimális közelítő megoldást!

9. Határozzuk meg a következő mátrixok pszeudoinverzét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Mutassuk meg, hogy általában nem igaz, hogy $(AB)^+$ egyenlő lenne B^+A^+-szal. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixokat!

11. Oldjuk meg a 8. feladatot az együtthatómátrix pszeudoinverzével való beszorzással is!

Póthf

1. Oldjuk meg az alábbi két kongruenciát, aztán keressük meg kínai maradéktétellel a közös megoldásukat!

$$\begin{aligned} x &\equiv 15^{28} \pmod{13} \\ 10x &\equiv 424 \pmod{22} \end{aligned}$$

2. Adjuk meg azt a lehető legkisebb fokú 1 főegyütthatós $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, amelynek i és $1-i$ is gyöke! Bontsuk fel f-et irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_5[x]$-ben is!

3. Hány megoldása van az alábbi kibővített mátrixhoz tartozó egyenletrendszernek $\mathbb{R}$-ben, illetve $\mathbb{Z}_3$-ban? Oldjuk is meg $\mathbb{Z}_3$ fölött, és soroljuk fel az összes megoldását!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

4. Adjuk meg az alábbi A mátrix oszlopterének, sorterének és nullterének egy-egy bázisát! Írjuk fel A mind az öt oszlopának a koordinátavektorát az $\mathcal{O}(A)$ kiválasztott bázisában!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & 1 \\ -1 & 3 & c \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Számítsuk ki A determinánsát!
b) A $c \in \mathbb{R}$ paraméter értékétől függően mennyi A rangja?
c) Számítsuk ki A inverzét abban az esetben, amikor $c = -1$.

6. Határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inkonzisztens lineáris egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális közelítő megoldását, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$