Bevezetés az algebrába 1 **2. zh** 2023. november 15.

1. *Bontsuk fel irreducibilis polinomok szorzatára az* $f(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x - 2$ *polinomot* $\mathbb{Q}[x]$*-ben és* $\mathbb{Z}_3[x]$*-ben.* *(4 pont)*

Megoldás: $\mathbb{Q}$ fölött: A racionális gyökteszt szerint racionális gyöke csak $\pm 1, \pm 2$ lehet. Látható, hogy 1 nem gyök.

	1	1	4	-2	-8	-2
-1	1	0	4	-6	-2	0

$f(x) = (x+1)(x^4 + 4x^2 - 6x - 2)$, és a második tényező is irreduciblis, mert $p = 2$-vel kielégíti a Schönemann-Eisenstein-kritériumot.
$\mathbb{Z}_3$ fölött is felbontás az előbbi, de ott megpróbáljuk a második tényezőt tovább bontani. $g(x) = x^4 + 4x^2 - 6x - 2 = x^4 + x^2 + 1$, és ennek 1 és -1 is gyöke $\mathbb{Z}_3$-ban.

	1	0	1	0	1
1	1	1	-1	-1	0
1	1	-1	1	0	
-1	1	1	0		

$f(x) = (x+1)^3(x-1)^2$.
Vagy $\mathbb{Z}_3$ fölött lehet: $x^4 + x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2 = (x+1)^2(x-1)^2 \Rightarrow f(x) = (x+1)^3(x-1)^2$.

2. *Adjunk meg olyan* $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *polinomot, amelyre* $f(1) = 5$, $f(-1) = 3$, *és* $f(0) = 2$. *(3 pont)*

Megoldás: Newton-módszerrel.
$f_0(x) = 5$.
$f_1(x) = 5 + A(x-1)$, $f_1(-1) = 5 - 2A = 3 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow f_1(x) = 5 + 1(x-1) = x + 4$.
$f_2(x) = x + 4 + B(x-1)(x+1)$, $f_2(0) = 4 - B = 2 \Rightarrow B = 2 \Rightarrow$
$f(x) = f_2(x) = x + 4 + 2(x-1)(x+1) = 2x^2 + x + 2$.

3. *Adjuk meg az* $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ac} + \dfrac{c}{ab}$ *kifejezés értékét, ha* a, b, c *az* $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 3$ *polinom gyökei* $\mathbb{C}$*-ben.* *(3 pont)*

Megoldás: Az $f(x)$ gyöktényezős felbontásából (leosztva a főegyütthatóval):
$x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = (x-a)(x-b)(x-c) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} a+b+c &= -1/2 \\ ab+bc+ac &= -1/2 \\ abc &= -3/2 \end{aligned}$$

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = \frac{(a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc)}{abc} = \frac{\frac{1}{4}+1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{5/4}{3/2} = -\frac{5}{6}.$$

4. *Hány megoldása van az alábbi kibővített mátrixú egyenletrendszernek az a paramétertől függően $\mathbb{R}$-ben, illetve $\mathbb{Z}_2$-ben?* *(4 pont)*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & a-1 & -a \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & a-1 & -a \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & -a+1 \end{array}\right]$$

$\mathbb{R}$-ben:
Ha $a \neq -1$, akkor ez lépcsős alak, konzisztens, és nincs szabad változó $\Rightarrow$ 1 megoldás van.
Ha $a = -1$, akkor az utolsó sor ellentmondásos, nincs megoldás.
$\mathbb{Z}_2$-ben:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & a \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ha $a = 0$: konzisztens, 1 szabad változóval $\Rightarrow 2^1 = 2$ megoldás.
Ha $a = 1$: a második sor is $\mathbf{0}$, az er. konzisztens, 2 szabad változóval $\Rightarrow 2^2 = 4$ megoldás.

5. *Adjuk meg a* $\operatorname{span}((1,2,-1),(1,1,1),(2,3,0),(2,1,4)) \leq \mathbb{R}^3$ *altér egy bázisát.* *(2 pont)*
Megoldás:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az oszloptérnek bázisát alkotja az A mátrix két bázisoszlopa: $\{(1,2,-1),(1,1,1)\}$.

6. *Határozzuk meg azokat az* $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *mátrixokat, amelyekre* $AX = XA$, *ha* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
Van-e köztük 1 rangú? *(4 pont)*

Megoldás: $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$-re

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

$$XA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a-b \\ c & c-d \end{bmatrix}$$

egyenlők, ha $c = 0$ és $a - 2b - d = 0$, azaz $c = 0$ és $d = a - 2b$.

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a-2b \end{bmatrix},$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Van köztük 1 rangú, pl. amikor $a = 0$ és $b \neq 0$, mondjuk, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.