1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **1. vizsga – elmélet** **2023-12-19**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc.

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha H az $\mathbb{R}$ olyan részhalmaza, amelynek van legkisebb eleme, akkor H jólrendezett. **H**

b) Ha $m, n \in \mathbb{N}^+$ relatív prímek, akkor van olyan $x \in \mathbb{N}$, hogy $x \equiv n \pmod{m}$ és $x \equiv m \pmod{n}$. **I**

c) Ha ε komplex egységgyök, akkor $-\varepsilon$ is egységgyök. **I**

d) Valós, nem konstans polinom összes $\mathbb{C}$-beli gyökének összege valós szám. **I**

e) Egy U affin altér bármely két vektorának összege is benne van U-ban. **H**

f) Egy csupa pozitív számból álló négyzetes mátrix determinánsa feltétlenül pozitív. **H**

2. Az alábbiak közül melyik gyűrű nullosztómentes, azaz melyikben igaz, hogy $a \neq 0$ és $b \neq 0$ esetén $ab \neq 0$?
$\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{R}$ *(2 pont)*

$\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}$

3. Hány megoldása van a $6x \equiv 9 \pmod{21}$ kongruenciának modulo 21? *(2 pont)*

3

4. Adjunk meg egy olyan $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomot, amely $\mathbb{Q}[x]$-ben reducibilis, de nincs racionális gyöke. *(2 pont)*

Pl. $(x^2+1)^2$

5. Mi az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban, ha f standard mátrixa A, és $P = T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ oszlopai a $\mathcal{B}$ bázis elemei. *(2 pont)*

$P^{-1}AP$

6. Legyen $A \in \mathbb{R}^{4\times3}$ mátrix, és tegyük fel, hogy van olyan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$, amelyre az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Mennyi A rangja? *(2 pont)*

3

7. Ha $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, és $|A| = 5$, akkor mennyi a $(2A)^{-1}A^T$ determinánsa? *(2 pont)*

1/8

8. Mi az $A^+\mathbf{x} = \mathbf{b}$ legkisebb abszolút értékű optimális közelítő megoldása, ha A^+ az A pszeudoinverze, és *(2 pont)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^{++}\mathbf{b} = A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

9. Definiáljuk a szimmetrikus polinomokat, és adjuk meg azt a lehető legkevesebb tagból álló $f(x, y, z)$ szimmetrikus polinomot, amelynek tagja az x^2y^2z. *(2 pont)*

Olyan többváltozós polinom, amelyet a változók tetszőleges permutációja változatlanul hagy.
$x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2$

10. Mondjuk ki a számelmélet alaptételét $\mathbb{Z}$-ben! *(3 pont)*

Minden $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, \pm 1$ szám felbontható irreducibilisek szorzatára, és ez a felbontás sorrendtől és előjelektől eltekintve egyértelmű.

11. Definiáljuk az alterek direkt összegét, és adjunk erre példát is $\mathbb{R}^3$-ben *(3 pont)*

$U, W \leq V$-re $V = U \oplus W$, ha $V = U + W$ és $U \cap W = 0$.
Pl. az xy-sík és a z tengely direkt összege $\mathbb{R}^3$.

12. Mondjuk ki a determinánsok (sor szerinti) ferde kifejtéséről szóló tételt! *(2 pont)*

$A \in K^{n \times n}$-re $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$, ha $i \neq k$.

13. Mondjuk ki a kétváltozós lineáris diofantoszi egyenlet megoldhatóságáról és megoldásairól szóló tételt, és bizonyítsuk is be, hogy csak ezek lehetnek a megoldásai. *(5 pont)*

Tétel: Egy $ax + by = c$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ diofantoszi egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha $d := (a, b) \mid c$.
Ha (x_0, y_0) egy megoldás, akkor az összes megoldás $x = x_0 + t\frac{b}{d}$, $y = y_0 - t\frac{a}{d}$ $(t \in Z)$.
A kért irány bizonyítása: Tfh. (x_0, y_0) és (x, y) is megoldás. Ekkor
$ax_0 + by_0 = c = ax + by \implies$
$a(x - x_0) = b(y_0 - y) \implies$
$a \mid b(y - y_0) \implies \frac{a}{d} \mid \frac{b}{d}(y - y_0)$, de $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1 \implies$
$\frac{a}{d} \mid (y_0 - y \implies \exists t \in \mathbb{Z}$: $y_0 - y = t\frac{a}{d} \implies y = y_0 - t\frac{a}{d}$,
és $x - x_0 = \frac{b}{a}(y_0 - y) = t\frac{b}{d} \implies x = x_0 + t\frac{b}{d}$.

14. Bizonyítsuk be, hogy $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ *(5 pont)*

Legyen $A, B \in K^{n \times n}$.
Ha $r(A) < n \implies r(AB) \leq r(A) < n \implies |AB| = 0$ és $|A| \cdot |B| = 0|B| = 0$.
Ha $r(A) = n$, akkor A felírható elemi mátrixok szorzataként: $A = E_1 \cdots E_k$.
Egy elemi mátrixszal való balszorzás elemi sorműveletet hajt végre, így a kapott determináns mindig ugyanannyiszorosa az eredetinek, azaz
$\exists c \in K$: $|E_1 \cdots E_k X| = c|X|$ minden $X \in K^{n \times n}$-re. $\implies$
$|AB| = |E_1 \cdots E_k B| = c|B|$ és $|A| = |E_1 \cdots E_n I| = c|I| = c \implies$
$|AB| = c|B| = |A| \cdot |B|$.