1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **2. vizsga – elmélet** **2024-01-09**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc.

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) $a, b \in \mathbb{N}^+$-ra $\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{N}^+\}$ az (a, b) összes pozitív egész többszörösének halmaza. H

b) Ha egy z komplex szám (multiplikatív) rendje páros, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy $z^n = -1$. I

c) Ha $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, akkor valamilyen p prímmel teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritériumot. H

d) Ha $\mathbb{R}^3$ két affin alterének metszete nem üres, akkor az is affin altér. I

e) Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$. I

f) Ha $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, és $r(A) = 2$, akkor A-nak minden 2×2-es részmátrixa nem nulla determinánsú. H

2. Mi a feltétele annak, hogy az $a \mid bc$ oszthatóságból $a \mid c$ következzen? *(2 pont)*

$(a, b) = 1$

3. Írjuk fel az $\dfrac{x^{18} - 1}{x^6 - 1}$ hányadospolinomot körosztási polinomok szorzataként. *(2 pont)*

$\Phi_9(x)\Phi_{18}(x)$

4. Mi a főtagja annak az $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ homogén szimmetrikus polinomnak, amelynek tagja az $x_1x_3^3x_4^2$? *(2 pont)*

$x_1^3x_2^2x_3$

5. Legyen $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mátrix, és tegyük fel, hogy van olyan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, amelyre az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek nincs megoldása. Mennyi lehet az A rangja? *(2 pont)*

$0, 1, 2$

6. Legyen C az $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ bázisban. Mi a C második oszlopa? *(2 pont)*

$[f(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}$

7. Ha $A = [\mathbf{a}|\mathbf{b}|\mathbf{c}] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, és $|A| = 2$, akkor mi a $B = [2\mathbf{b}|\mathbf{c}|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}]$ determinánsa? *(2 pont)*

4

8. Adjunk meg olyan $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixokat, hogy $A \neq 0$ és $B \neq 0$, de $AB = 0$.

Pl. $A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. Definiáljuk a kitüntetett közös osztót. *(2 pont)*

Az $a, b \in \mathbb{Z}$ számok kitüntetett közös osztója d, ha
$d \in \mathbb{N}$;
$d \mid a$ és $d \mid b$;
ha $c \mid a$ és $c \mid b$ valamely $c \in \mathbb{Z}$-re, akkor $c \mid d$.

10. Mondjuk ki a szimmetrikus polinomok alaptételét. *(2 pont)*

Minden szimmetrikus polinom felírható elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

11. Definiáljuk egy $f : V \to W$ lineáris leképezés képterét és magterét, és mondjuk ki az ezekre vonatkozó dimenziótételt. *(3 pont)*

Képtér: $\operatorname{Im} f = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$
Magtér: $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{v} \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$
$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V$

12. Definiáljuk egy mátrix LU-felbontását, és mondjuk ki az LU-felbontás létezésére tanult elégséges feltételt. *(3 pont)*

$A = LU$, ahol L normált alsó háromszögmátrix és U felső háromszögmátrix.
Ha az A mátrix minden főminorja nem nulla, akkor A-nak van LU-felbontása.

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be az Euler–Fermat-tételt. *(5 pont)*

Tétel: $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^+$, $(a, m) = 1 \implies a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.
Biz.: Legyen $r_1, \ldots, r_{\varphi(m)}$ redukált maradékrendszer modulo m.
$(a, m) = 1 \implies ar_1, \ldots, ar_{\varphi(m)}$ is red. mar.rsz. modulo m. $\implies$
A két mar.rsz. elemei mod m ugyanazokat a maradékokat adják, így
$ar_1 \cdots ar_{\varphi(m)} \equiv r_1 \cdots r_{\varphi(m)} \pmod{m} \implies r := r_1 \cdots r_{\varphi(m)}$-re $a^{\varphi(m)} r \equiv r \pmod{m}$
$(r, m) = 1$, mert $(r_i, m) = 1$ $\forall i$, így egyszerűsíthetünk r-rel: $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

14. Bizonyítsuk be, hogy egy inkonzisztens $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális közelítő megoldásai pontosan az $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ normálegyenlet megoldásai. *(5 pont)*

Az optimális közelítő megoldások az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ megoldásai, ahol $\mathbf{b}'$ a $\mathbf{b}$ merőleges vetülete $\mathcal{O}(A)$-ra. Tehát azt kell belátni, hogy
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}' \iff A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

$\Rightarrow$: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}' \implies A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}' = A^T\mathbf{b} + A^T(\mathbf{b}' - \mathbf{b})$.
De $\mathbf{b} - \mathbf{b}' \in \mathcal{O}(A)^\perp = \mathcal{S}(A^T)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$, így $A^T(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$. $\implies$
$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

$\Leftarrow$: $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \implies A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies$
$\mathbf{b} - A\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A^T) = \mathcal{S}(A^T)^\perp = \mathcal{O}(A^T)^\perp$, és $A\mathbf{x} \in \mathcal{O}(A) \implies$
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}'$.