1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ____ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **3. vizsga – elmélet** **2024-01-15**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc.

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha $\{a_1, \dots, a_m\}$ teljes maradékrendszer mod m, akkor $\{2a_1, 2a_2, \dots, 2a_m\}$ is az. H

b) Ha $\varepsilon \in \mathbb{C}$ n-edik egységgyök, akkor ε $2n$-edik egységgyök is. I

c) Ha egy $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom primitív, és irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, akkor $\mathbb{Z}[x]$-ben is irreducibilis. I

d) Ha három vektor lineárisan összefüggő, akkor mindegyik előállítható a másik kettő lineáris kombinációjaként. H

e) Ha valamely $V, W \leq \mathbb{R}^n$-re $\dim V + \dim W = n$, akkor $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. H

f) Minden $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak van LU-felbontása. H

2. Adjunk meg olyan p prímet, amelyre $a^6 \equiv 1 \pmod p$, ha $(a, p) = 1$. *(2 pont)*

Pl. 7 (vagy 2 vagy 3)

3. Melyek azok az egyjegyű, pozitív egész c számok, amelyekre a $15x + 27y = c$ diofantoszi egyenletnek van megoldása? *(2 pont)*

$3, 6, 9$

4. Hány valós gyöke lehet annak az ötödfokú valós polinomnak, amelynek az i kétszeres gyöke? *(2 pont)*

1

5. Mi a $abc+abd+acd+bcd$ értéke, ha a, b, c, d a $2x^4-4x+1$ polinom gyökei? *(2 pont)*

2

6. Hány megoldása van az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek $\mathbb{Z}_2$-ben, ha $A \in \mathbb{Z}_2^{4x5}$ és $r(A) = 2$? *(2 pont)*

Pl. 8

7. Mi az $\mathbb{R}^2$ sík origón átmenő, $\mathbf{v}$-vel párhuzamos egyenesére való merőleges vetítés mátrixa a $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ bázisban, ha $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$? *(2 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Mi a determinánsa annak a valós 6×6-os A mátrixnak, amelynek az összes nemnulla eleme
$a_{i,i+1} = 1$ (ahol $i = 1, 2, 3, 4, 5$) és $a_{6,1} = 1$?

-1

9. Mondjuk ki a maradékos osztás tételét $\mathbb{Z}$-ben. *(2 pont)*

$\forall\ a \in \mathbb{Z}$, $0 \neq b \in \mathbb{Z}$-hez $\exists!\ q, r \in \mathbb{Z}$, hogy $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$.

10. Mondjuk ki a fordított Schönemann–Eisenstein-kritériumot. *(3 pont)*

Ha $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, és van olyan p prím, hogy $p \nmid a_0$, $p \mid a_1, \ldots, a_n$, és $p^2 \nmid a_n$, akkor $f(x)$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben.

11. Definiáljuk egy $f : V \to V$ lineáris transzformáció mátrixát egy $\mathcal{B}$ bázisban a mátrix vektorokon való hatásával. *(2 pont)*

$A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [f(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}\ \forall \mathbf{v} \in V$

12. Mi egy π permutáció $I(\pi)$ inverziószáma? Írjuk fel egy $A \in K^{n\times n}$ mátrix determinánsát a mátrix elemeivel kifejezve (Det$A$). *(3 pont)*

$I(\pi) = |\{(i,j) \mid i < j,\ \pi(i) > \pi(j)\}$

$|A| = \sum\limits_{\pi\ perm.} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Dirichlet-féle approximációs tételt valós számok racionálisakkal való közelítéséről. *(5 pont)*

Tétel: $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}^+\ \exists p, q \in \mathbb{Z}$: $1 \leq q \leq n$ és $|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{nq}$.

Biz.: $0, \{a\}, \{2a\}, \ldots, \{na\} \in [0,1) = [0, \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \cup \ldots \cup [\frac{n-1}{n}, 1) \implies$

A törtrészek közül valamelyik kettő ugyanabba az intervallumba esik, azaz

$\exists i > j$: $|ia - ja| < \frac{1}{n}$. $\implies$

$\frac{1}{n} > |ia - ja| = |(ia - ja) - ([ia] - [ja])| = |(i-j)a - ([ia] - [ja])|$. $\implies$

$p := [ia] - [ja]$ és $q := i - j$ választással $|qa - p| < \frac{1}{n}$, azaz $|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{nq}$.

14. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a lineáris egyenletrendszerek megoldásait determinánsok segítségével megadó Cramer-szabályt. *(5 pont)*

Tétel: Ha $A \in K^{n\times n}$, $|A| \neq 0$ és $\mathbf{b} \in K^n$, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er.-nek egyértelmű megoldása van, és erre $x_i = \frac{|A_{i,\mathbf{b}}|}{|A|}$, ahol $A_{i,\mathbf{b}}$ az a mátrix, amelyet az A-ból úgy kapunk, hogy az i. oszlopát $\mathbf{b}$-vel helyettesítjük.

Biz.: $|A| \neq 0 \implies A$ invertálható, és

$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{|A|}(\operatorname{adj} A)\mathbf{b} \implies$

$x_i = \frac{1}{|A|} \sum\limits_j (\operatorname{adj} A)_{ij} b_j = \frac{1}{|A|} \sum\limits_j A_{ji} b_j = \frac{1}{|A|} |A_{i,\mathbf{b}}|$ az i. oszlop szerinti kifejtéssel.