1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **1. vizsga – elmélet** **2023-12-19**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc.

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha H az $\mathbb{R}$ olyan részhalmaza, amelynek van legkisebb eleme, akkor H jólrendezett.

b) Ha $m, n \in \mathbb{N}^+$ relatív prímek, akkor van olyan $x \in \mathbb{N}$, hogy $x \equiv n \pmod{m}$ és $x \equiv m \pmod{n}$.

c) Ha ε komplex egységgyök, akkor $-\varepsilon$ is egységgyök.

d) Valós, nem konstans polinom összes $\mathbb{C}$-beli gyökének összege valós szám.

e) Egy U affin altér bármely két vektorának összege is benne van U-ban.

f) Egy csupa pozitív számból álló négyzetes mátrix determinánsa feltétlenül pozitív.

2. Az alábbiak közül melyik gyűrű nullosztómentes, azaz melyikben igaz, hogy $a \neq 0$ és $b \neq 0$ esetén $ab \neq 0$?
$\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{R}$ *(2 pont)*

3. Hány megoldása van a $6x \equiv 9 \pmod{21}$ kongruenciának modulo 21? *(2 pont)*

4. Adjunk meg egy olyan $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomot, amely $\mathbb{Q}[x]$-ben reducibilis, de nincs racionális gyöke. *(2 pont)*

5. Mi az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban, ha f standard mátrixa A, és $P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ oszlopai a $\mathcal{B}$ bázis elemei. *(2 pont)*

6. Legyen $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ mátrix, és tegyük fel, hogy van olyan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$, amelyre az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Mennyi A rangja? *(2 pont)*

7. Ha $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, és $|A| = 5$, akkor mennyi a $(2A)^{-1}A^T$ determinánsa? *(2 pont)*

8. Mi az $A^+\mathbf{x} = \mathbf{b}$ legkisebb abszolút értékű optimális közelítő megoldása, ha A^+ az A pszeudoinverze, és *(2 pont)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9. Definiáljuk a szimmetrikus polinomokat, és adjuk meg azt a lehető legkevesebb tagból álló $f(x, y, z)$ szimmetrikus polinomot, amelynek tagja az x^2y^2z. *(2 pont)*

10. Mondjuk ki a számelmélet alaptételét $\mathbb{Z}$-ben! *(3 pont)*

11. Definiáljuk az alterek direkt összegét, és adjunk erre példát is $\mathbb{R}^3$-ben *(3 pont)*

12. Mondjuk ki a determinánsok (sor szerinti) ferde kifejtéséről szóló tételt! *(2 pont)*

13. Mondjuk ki a kétváltozós lineáris diofantoszi egyenlet megoldhatóságáról és megoldásairól szóló tételt, és bizonyítsuk is be, hogy csak ezek lehetnek a megoldásai. *(5 pont)*

14. Bizonyítsuk be, hogy $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ *(5 pont)*