1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **2. vizsga – elmélet** **2024-01-09**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc.

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) $a, b \in \mathbb{N}^+$-ra $\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{N}^+\}$ az (a, b) összes pozitív egész többszörösének halmaza. ☐

b) Ha egy z komplex szám (multiplikatív) rendje páros, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy $z^n = -1$. ☐

c) Ha $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, akkor valamilyen p prímmel teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritériumot. ☐

d) Ha $\mathbb{R}^3$ két affin alterének metszete nem üres, akkor az is affin altér. ☐

e) Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$. ☐

f) Ha $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, és $r(A) = 2$, akkor A-nak minden 2×2-es részmátrixa nem nulla determinánsú. ☐

2. Mi a feltétele annak, hogy az $a \mid bc$ oszthatóságból $a \mid c$ következzen? *(2 pont)*

3. Írjuk fel az $\dfrac{x^{18} - 1}{x^6 - 1}$ hányadospolinomot körosztási polinomok szorzataként. *(2 pont)*

4. Mi a főtagja annak az $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ homogén szimmetrikus polinomnak, amelynek tagja az $x_1 x_3^3 x_4^2$? *(2 pont)*

5. Legyen $A \in \mathbb{R}^{3\times4}$ mátrix, és tegyük fel, hogy van olyan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, amelyre az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek nincs megoldása. Mennyi lehet az A rangja? *(2 pont)*

6. Legyen C az $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ bázisban. Mi a C második oszlopa? *(2 pont)*

7. Ha $A = [\mathbf{a}|\mathbf{b}|\mathbf{c}] \in \mathbb{R}^{3\times3}$, és $|A| = 2$, akkor mi a $B = [2\mathbf{b}|\mathbf{c}|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}]$ determinánsa? *(2 pont)*

8. Adjunk meg olyan $A, B \in \mathbb{R}^{2\times2}$ mátrixokat, hogy $A \neq 0$ és $B \neq 0$, de $AB = 0$.

9. Definiáljuk a kitüntetett közös osztót. *(2 pont)*

10. Mondjuk ki a szimmetrikus polinomok alaptételét. *(2 pont)*

11. Definiáljuk egy $f : V \to W$ lineáris leképezés képterét és magterét, és mondjuk ki az ezekre vonatkozó dimenziótételt. *(3 pont)*

12. Definiáljuk egy mátrix LU-felbontását, és mondjuk ki az LU-felbontás létezésére tanult elégséges feltételt. *(3 pont)*

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be az Euler–Fermat-tételt. *(5 pont)*

14. Bizonyítsuk be, hogy egy inkonzisztens $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális közelítő megoldásai pontosan az $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ normálegyenlet megoldásai. *(5 pont)*