

| | | | | |
|---|-----|------|-----|---|
| 1 | 2-8 | 9-12 | 13- | Σ |
|---|-----|------|-----|---|

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 1

3. vizsga – elmélet

2024-01-15

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc.

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! (6 pont)

a) Ha $\{a_1, \dots, a_m\}$ teljes maradékrendszer mod m , akkor $\{2a_1, 2a_2, \dots, 2a_m\}$ is az.

b) Ha $\varepsilon \in \mathbb{C}$ n -edik egységgyök, akkor ε $2n$ -edik egységgyök is.

c) Ha egy $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom primitív, és irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ -ben, akkor $\mathbb{Z}[x]$ -ben is irreducibilis.

d) Ha három vektor lineárisan összefüggő, akkor mindegyik előállítható a másik kettő lineáris kombinációjaként.

e) Ha valamely $V, W \leq \mathbb{R}^n$ -re $\dim V + \dim W = n$, akkor $\mathbb{R}^n = V \oplus W$.

f) Minden $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak van LU-felbontása.

2. Adjunk meg olyan p prímet, amelyre $a^6 \equiv 1 \pmod{p}$, ha $(a, p) = 1$. (2 pont)

3. Melyek azok az egyjegyű, pozitív egész c számok, amelyekre a $15x + 27y = c$ diofantoszi egyenletnek van megoldása? (2 pont)

4. Hány valós gyöke lehet annak az ötödfokú valós polinomnak, amelynek az i kétszeres gyöke? (2 pont)

5. Mi a $abc + abd + acd + bcd$ értéke, ha a, b, c, d a $2x^4 - 4x + 1$ polinom gyökei? (2 pont)

6. Hány megoldása van az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek \mathbb{Z}_2 -ben, ha $A \in \mathbb{Z}_2^{4 \times 5}$ és $r(A) = 2$? (2 pont)

7. Mi az \mathbb{R}^2 sík origón átmenő, \mathbf{v} -vel párhuzamos egyenesére való merőleges vetítés mátrixa a $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ bázisban, ha $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$? (2 pont)

8. Mi a determinánusa annak a valós 6×6 -os A mátrixnak, amelynek az összes nemnulla eleme $a_{i,i+1} = 1$ (ahol $i = 1, 2, 3, 4, 5$) és $a_{6,1} = 1$?

9. Mondjuk ki a maradékos osztás tételét \mathbb{Z} -ben.

(2 pont)

10. Mondjuk ki a fordított Schönemann–Eisenstein-kritériumot.

(3 pont)

11. Definiáljuk egy $f : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció mátrixát egy \mathcal{B} bázisban a mátrix vektorokon való hatásával.

(2 pont)

12. Mi egy π permutáció $I(\pi)$ inverziószáma? Írjuk fel egy $A \in K^{n \times n}$ mátrix determinánsát a mátrix elemeivel kifejezve ($\text{Det}A$).

(3 pont)

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Dirichlet-féle approximációs tételt valós számok racionálisakkal való közeletéséről.

(5 pont)

14. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a lineáris egyenletrendszerek megoldásait determinánsok segítségével megadó Cramer-szabályt.

(5 pont)