

Munkaidő: 60 perc

1. Bontsuk fel irreducibilis polinomok szorzatára az $f(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x - 2$ polinomot $\mathbb{Q}[x]$ -ben és $\mathbb{Z}_3[x]$ -ben. (4 pont)
2. Adjunk meg olyan $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomot, amelyre $f(1) = 5$, $f(-1) = 3$, és $f(0) = 2$. (3 pont)
3. Adjuk meg az $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$ kifejezés értékét, ha a, b, c az $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 3$ polinom gyökei \mathbb{C} -ben. (3 pont)
4. Hány megoldása van az alábbi kibővített mátrixú egyenletrendszernek az a paramétertől függően \mathbb{R} -ben, illetve \mathbb{Z}_2 -ben? (4 pont)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & a-1 & -a \end{array} \right]$$

5. Adjuk meg a $\text{span}((1, 2, -1), (1, 1, 1), (2, 3, 0), (2, 1, 4)) \leq \mathbb{R}^3$ altér egy bázisát. (2 pont)
6. Határozzuk meg azokat az $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixokat, amelyekre $AX = XA$, ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
Van-e köztük 1 rangú? (4 pont)