1. Házi feladat (határidő: 2017-02-17)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x \qquad + z + 2w &= 3 \\ 2x + y + z + 2w &= 2 \\ x + y \qquad\qquad &= -4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer összes optimális megoldását a normálegyenlet segítségével, valamint válasszuk ki közülük az egyetlen sortérbe eső megoldást.

2. Számítsuk ki az $\left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]$ és az $[1\ 1\ 1\ 1]$ mátrixok pszeudoinverzét!

3. Írjuk fel az origón átmenő, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ irányvektorú E egyenes mentén az $x + y + z = 0$ egyenletű S síkra vetítő leképezés, illetve az S sík mentén az E egyenesre való vetítés standard mátrixát! Mi a két leképezés kompozíciójának standard mátrixa?

4. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik igen, annak írjuk fel a standard mátrixát! Mi a lineáris leképezés magtere és képtere?

   (a) $(x, y, z) \mapsto (x - 2y, z, x + y + z)$

   (b) $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, 3x - y)$

   (c) $(x, y, z) \mapsto (1, x, x^2y)$

5. Mi lehet a rangja annak az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek, amelyre $\operatorname{Ker} f \leq \operatorname{Im} f$? Adjunk példát mindegyik esetre a standard mátrix felírásával!

6. Bizonyítsuk be, hogy egy injektív lineáris leképezés független rendszert függetlenbe visz, egy szürjektív lineáris leképezés pedig generátorrendszert generátorrendszerbe!

7. Adjuk meg a mátrixát a következő lineáris leképezéskenek a megadott bázisban (vagy bázispárban)!

   (a) $f(x, y, z) = (x+2y-z, x-y+z)$ standard bázisban, illetve a $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ és $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ bázispárban!

   (b) a 3×3-as valós mátrixokon az $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ leképezés a standard bázisban!

8. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok között melyek hasonlóak $\mathbb{R}$ fölött?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Adjuk meg egy **ortonormált** bázisát az alábbi vektorok által kifeszített térnek a Garam–Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1),\ \mathbf{v}_2 = (1, 2, 1, 2), \mathbf{v}_3 = (1, 2, 3, 6).$$

10. Legyen $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -1, -1, 1)$.

    (a) Igazoljuk, hogy $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ ortogonális bázis $\mathbb{R}^4$-ben!

    (b) Írjuk fel azt a képletet, mely megadja egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor fenti bázisra vonatkozó i-edik koordinátáját ($i = 1, 2, 3, 4$)!

    (c) Számítsuk ki az $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)$ vektornak a $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ altérre való merőleges vetületét!

*11 Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ egy merőleges vetítés mátrixa, azaz $\mathbf{A}^T = \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$. Igaz-e az állítás megfordítása?

*12 Legyen az $f : K^n \to K^m$ lineáris leképezés rangja r. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ r rangú mátrix előáll f mátrixaként alkalmas bázispárban!