2. Házi feladat (határidő: 2017-02-24)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixra $\langle x, y\rangle := \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ skalárszorzat $\mathbb{R}^2$-en.

   a) Mi az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorok hossza és skalárszorzata erre a skalárszorzatra nézve?

   b) Adjunk meg egy ortonormált bázist!

2. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$
Határozzuk meg $\mathbf{A}$ QR-felbontását Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!

3. *(a)* Írjuk fel azt a 2×2-es forgatás mátrixot, amely az $(1, 2)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5}, 0)$ vektorba!

   (b) Írjuk fel a $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1)$ normálvektorú hipersíkra való Householder-tükrözés mátrixát!

   (c) Írjuk fel azt a Householder-tükrözést, amely a $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla, és az első koordináta negatív! Milyen normálvektorú hipersíkra tükröz ez a transzformáció?

4. Határozzuk meg az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$
mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

5. Határozzuk meg az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$
mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!

6. Határozzuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer összes optimális megoldását QR-felbontás segítségével, ha $\mathbf{A}$ a 2. feladat mátrixa, és $\mathbf{b} = (0, 0, 0, 1)$! Hány optimális megoldása van?

7. Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra teljesül:
$$\big|\, |\mathbf{u}| - |\mathbf{v}| \,\big| \le |\mathbf{u} - \mathbf{v}|.$$
Mikor van egyenlőség?

8. Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra teljesül:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right).$$

9. *(a)* Mutassuk meg, hogy minden szemiortogonális mátrix kiegészíthető ortogonális mátrixszá!
(b) Az 2. feladatbeli QR-felbontás $\mathbf{Q}$ mátrixát egészítsük ki ortogonális mátrixszá és ennek segítségével adjuk meg $\mathbf{A}$ teljes QR-felbontását!

10. Melyik szemiortogonális az alábbi mátrixok közül? Mindegyik mátrixra állapítsuk meg, hogy melyik oldali inverze létezik és azt számítsuk ki!
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*11 Legyen $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ tetszőleges bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ bázis létezik, amelyre $\mathbf{b}_i\mathbf{c}_j = \delta_{ij}$ $\forall i, j$-re!

*12 Adjunk meg végtelen sok olyan vektort $\mathbb{R}^n$-ben, amelyek közül bármely n darab független, de semelyik kettő nem merőleges egymásra!