

3. Házi feladat (határidő: 2017-03-03)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bizonyítsuk be, hogy \mathbf{A} akkor és csak akkor szimmetrikus, ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $(\mathbf{A}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{y})$!
2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix QR-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$, akkor a $\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{Q}$ mátrix is szimmetrikus!
3. Mekkora az alábbi vektorok hossza?
 - (a) $(1 - i, i, -2, 1 + i)$
 - (b) $(a + bi, b + ci, c + ai)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$
4. Számítsuk ki az alábbi két vektor skaláris szorzatát és távolságát!
 - (a) $(1 + i, i, -1)$, $(1 + i, -i, -1)$
 - (b) $(1 - i, i, -2, 1 + i)$, $(1 + i, 0, 2, 1 - i)$
5. Végezzük el a Gram-Schmidt-eljárást a \mathbb{C}^3 -beli $(i, 1, i)$, $(i, 1, 0)$, $(i, 0, 0)$ vektorokon!
6. Milyen feltételek mellett unitér a következő mátrix, ha $a, b \in \mathbb{R}$?

$$\begin{bmatrix} a & 0 & bi & 0 \\ 0 & a & 0 & bi \\ bi & 0 & a & 0 \\ 0 & bi & 0 & a \end{bmatrix}$$

7. Döntsük el a következő mátrixok mindegyikéről, hogy önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális-e!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

8. Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix önadjungált és unitér (így persze normális is). Keressünk egy olyan \mathbf{B} mátrixot, amely hasonló \mathbf{A} -hoz, és még csak nem is normális!
9. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix normális, az \mathbf{A} mátrixot pedig úgy kaptuk \mathbf{N} -ből, hogy az i . sorát, majd az i . oszlopát megszoroztuk -1 -gyel (tehát az ii indexű eleme nem változott). Bizonyítsuk be, hogy \mathbf{A} is normális!
10. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olyan mátrix, amelyre $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = -\mathbf{I}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor \mathbf{A} normális. Lássuk be, hogy ha \mathbf{A} emellett felső háromszögmátrix is, akkor csak diagonális lehet. Hány olyan mátrix van, amelyik kielégíti mind a két feltételt?
- *11. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixra $\text{tr}^2(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) \leq \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{B})$.
- *12. Definiáljuk \mathbb{F}_2^n -en egy vektor hosszát a benne szereplő 1-ek számaként. Bizonyítsuk be, hogy ez a hosszúság is kielégíti a háromszögegyenlőtlenséget, azaz $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$. Hány olyan vektorpár van, amelyekre a háromszögegyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül?