6. Házi feladat (határidő: 2017-03-31)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy normális mátrix oszlopai ortogonálisak (de nem feltétlenül ortonormáltak), akkor a sorai is ortogonálisak. Mutassunk példát arra, hogy ez nem feltétlenül igaz, ha a mátrix nem normális.

2. Tekintsük az $x^2 - y^2 = 0$ másodrendű görbét. Forgassuk el a koordinátarendszert $+60^o$-kal. Adjuk meg a másodrendű görbe egyenletét az új bázisban! Ábrázoljuk a görbét, valamint a két koordinátarendszer tengelyeit!

3. Hozzuk kanonikus alakra az alábbi másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!

$$8y^2 + 6xy + 6x - 2y + 1 = 0$$

4. Hozzuk diagonális alakra az alábbi kvadratikus alakokat! Döntsük el, hogy milyen a jellegük! Adjunk meg olyan bilineáris függvényeket, amelyekhez ezek tartoznak!

   (a) $x_1^2 + x_1x_2$

   (b) x_1x_2

   (c) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

5. *(a)* Mi a

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

   bilineáris függvény mátrixa a standard bázisban és az $\{(1, 1), (0, 1)\}$ bázisban?

   (b) Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak?

   (c) Mit mondhatunk a kvadratikus alak jellegéről?

6. Egy valós bilineáris függvény mátrixa egy bázisban

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) Határozzuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!

   (b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvadratikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

7. Egy $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$-en értelmezett komplex bilineáris függvény $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathrm{i}\bar{u}_1v_2 - \mathrm{i}\bar{u}_2v_1$.

   (a) Írjuk fel a mátrixát!

   (b) Hermite-féle-e a bilineáris függvény?

   (c) Határozzuk meg a jellegét!

   (d) Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben g mátrixa diagonális! Írjuk fel itt a kvadratikus alakot!

8. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, és tekintsük a $\varphi(p, q) = p(a)q(b) + q(a)p(b)$ bilineáris függvényt a legfeljebb másodfokú valós polinomok terén. Az a és b értékétől függően mi a jellege a φ-hez tartozó kvadratikus alaknak?

9. Gram-Schmidt ortogonalizációt végezve $\mathbb{R}^2$-en skaláris szorzatnak a

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2$$

   bilineáris függvényt tekintve hozzunk létre φ-re nézve ortonormált bázist $\mathbb{R}^2$-ben! Mi lesz φ mátrixa ebben a bázisban?

10. Legyen $\mathcal{V}_\mathbb{R}$ egy n dimenziós vektortér, φ valós szimmetrikus bilineáris függvény $\mathcal{V}$-n, és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{v}$-re φ-ortogonális elemek alteret alkotnak $\mathcal{V}$-ben! Hány dimenziós lehet ez az altér?

*11. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{O}$. Másrészt mutassuk meg, hogy hasonló állítás nem igaz a valósok körében, azaz mutassunk olyan zérusmátrixtól különböző $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot, hogy minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ legyen.

*12. Melyek azok a φ valós szimmetrikus bilineáris függvények, amelyekre bármely $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor eleme egy alkalmas φ-ortogonális bázisnak?