10. Házi feladat (határidő: 2017-04-28)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Milyen feltétel mellett igaz, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ mátrixok hasonlók?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Hány olyan páronként nem hasonló, nem diagonalizálható 3×3-as valós mátrix van, amelynek a determinánsa 0, és a nyoma 1?

3. Legyen $\mathbf{A}$ egy 10×10-es valós mátrix! Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját! Lehet-e az $(r_1, r_2, \dots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?
   (a) $(5, 6, \dots)$;
   (b) $(9, 8, 7, \dots, 4, 4 \dots)$;
   (c) $(10, 9, 8, \dots)$
   (d) $(8, 5, \dots)$

4. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-alakját!

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-féle normálalakját és egy Jordan-bázisát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Állítsuk elő az 5. feladatbeli $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok századik hatványát!

7. Az 5. feladatbeli mátrixokra határozzuk meg $e^{\mathbf{J}}$ értékét, ahol $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$, illetve $\mathbf{B}$ Jordan-féle normálalakja!

8. Az 5. feladatbeli mátrixokra határozzuk meg $e^{3\mathbf{A}}$ és $e^{3\mathbf{B}}$ értékét!

9. Határozzuk meg az alábbi mátrix komplex és valós Jordan-féle normálalakját!

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

10. Határozzuk meg az alábbi mátrix komplex és valós Jordan-féle normálalakját, valamint egy-egy komplex és valós Jordan-bázist!

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

*11. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy nem invertálható $\mathbf{A}$ komplex mátrixnak létezzen négyzetgyöke, azaz olyan $\mathbf{B}$ komplex mátrix, amelyre $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$!

*12. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es, λ sajátértékű Jordan-blokk. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$ blokkmátrix minimálpolinomja $(x - \lambda)^{n+1}$. Mi a $\mathbf{B}$ mátrix Jordan-féle normálalakja?