1. Mutassuk meg, hogy az alábbiak vektorterek! Hány dimenziósak? Adjunk meg bennük bázist!
a) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$
b) $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$
c) Az $n \times n$-es valós nulla nyomú mátrixok $\mathbb{R}$ felett.
d) Az $n \times n$-es komplex nulla nyomú mátrixok $\mathbb{R}$ felett.
e) Az $\mathbb{R}[x, y]$ $\mathbb{R}$-vektortérben a legfeljebb 3-adfokú polinomok.
f) Az $\mathbb{R}[x, y]$ $\mathbb{R}$-vektortérben a legfeljebb 3-adfokú szimmetrikus polinomok
g) Adott $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixszal felcserélhető 2×2 valós mátrixok.

2. Legyen V $\mathbb{Z}_p$ feletti n dimenziós vektortér!
a) Hány 1-dimenziós altere van V-nek?
b) Hány $n-1$-dimenziós altere van V-nek?
c) Hány k-dimenziós altere van V-nek?

3. Adjuk meg az $f : (x, y, z) \to (x+y-2z, x+z, 2x+y-z, -x-z)$ lineáris leképezés márixát standard bázisban. Mennyi a rangja? Hány dimenziós f magtere és képtere? Adjuk meg a magtérnek és a képtérnek egy-egy bázisát!

4. Legyen V véges dimenziós vektortér, és $f : V \to V$ lineáris transzformáció. Mutassuk meg, hogy vagy $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$, vagy f^2 rangja kisebb f rangjánál!

5. Adjuk meg a mátrixát a következő lineáris leképezéseknek a megadott bázisban (vagy bázispárban)! Adjuk meg a képtér és a magtér egy-egy bázisát!
a) $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y + z)$ standard bázisban, illetve a $\mathcal{B}_1' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ és $\mathcal{B}_2' = \{(1, 1), (2, 3)\}$ bázispárban!
b) az $x = t, y = 2t, z = -t$ tengely körüli $90°$-os forgatás a standard bázisban!
c) a 3×3-as valós mátrixokon az $A \to A + A^T$ leképezés a standard bázisban!
d) A $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ vektortéren egy $z = a + bi$ komplex számmal való szorzás mátrixát a $\mathcal{B}_1 = \{1, i\}$ és a $\mathcal{B}_1' = \{1 + i, 1 - i\}$ bázisban.

6. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, melyre $f(1, 1, 0) = (1, 0, 1)$, $f(1, 0, 1) = (0, 1, 1)$ és $f(0, 1, 1) = (1, 1, 0)$. Adjuk meg f mátrixát a $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ bázisban és a standard bázisban is! Milyen vektorokat fixál ez a leképezés és mi ez a lekápezés?

Házi feladatok

Beadási határidő: február 11.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Mutassuk meg, hogy azon $n \times n$-es $\mathbb{C}$ feletti mátrixok, melyekben az első sor összege 0, vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett és $\mathbb{C}$ felett is. Hány dimenziós ez a vektortér $\mathbb{R}$ felett, illetve $\mathbb{C}$ felett? Adjunk meg mindkét vektortérben egy-egy bázist!

2. Adjuk meg annak az $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek egy bázisát melynek elemei az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixszal felcserélhető 2×2-es valós mátrixok.

3. Adjuk meg az $f : (x, y, z) \to (x + 2y - z, x + y, y - z)$ lineáris transzformáció márixát a standard bázisban. Mennyi f rangja? Hány dimenziós f magtere és képtere? Adjuk meg a magtérnek és a képtérnek egy-egy bázisát! Adjuk meg a leképezés mátrixát a $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, -1)\}$ bázisban is.

4. Mutassuk meg, hogy az az $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ leképezés amelyre $f(p(x)) = p(2)$ (azaz f a 2-nek a polinomokba való behelyettesítése), lineáris leképezés. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{R}$-ben egy-egy bázist, és írjuk fel f mátrixát ebben a bázisban! Mi f magtere és képtere? Ezek hány dimenziósak? Adjunk meg a magtérben és a képtérben egy-egy bázist!

5. Mi lehet a rangja annak az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációnak, melyekre $\operatorname{Ker} f \leq \operatorname{Im} f$? Adjunk példát mindegyik esetre a standard mátrix felírásával!

6. Adjuk meg az $f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y + z)$ lineáris leképezés mátrixát a standard bázisban, illetve a $\mathcal{B}_1' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, -1)\}$ és $\mathcal{B}_2' = \{(1, -1), (1, 1)\}$ bázispárban!

7*. Legyen az $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ lineáris leképezés rangja r. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges r rangú $\mathbf{A} \in M_{m \times n}[\mathbb{F}]$ mátrix előáll f mátrixaként alkalmas bázispárban!