1. Milyen geometriai transzformációkat írnak le az alábbi ortogonális mátrixok $\mathbb{R}^2$-ben? Melyek hasonlóak? $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Mekkora szöget zárnak be a $(0,1,2,3,4)$ és a $(3,1,4,2,0)$ vektorok és mi a normájuk az $(\mathbb{R}^5, (\ ,\ ))$ standard euklideszi térben?

3. Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vektorok által kifeszített térnek egy ortonormált bázisát a standard skaláris szorzásra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval! $\mathbf{v}_1 = (0,1,0,-1), \mathbf{v}_2 = (2,0,0,0), \mathbf{v}_3 = (1,-1,0,1), \mathbf{v}_4 = (1,3,1,-1)$

4. Tekintsük az $(1,1,0,1),(1,1,0,0)$ által kifeszített W alteret $V = \mathbb{Z}_2^4$ vektortérben.
a) Mutassuk meg, hogy $W^\perp$ nem direkt kiegészítője W-nek.
b) Válasszunk ki a $\mathbb{Z}_2^4$ standard $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ bázisából két element, amelyek W-nek valamelyik direkt kiegészítőjét feszítik ki!

5. Bizonyítsuk be, hogy egy (V, f) valós eulideszi tér minden minden $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorára teljesül az $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 1/2(f(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{u},\mathbf{u}) - f(\mathbf{v},\mathbf{v}))$ polarizációs formula, így a norma meghatározza a skaláris szorzatot.

6. Legyen egy az $(\mathbb{R}^2, f)$ euklideszi térben f Gram-mátrixa a standard $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bázisban $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, és legyen $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (1,-1)$.
a) Mi lesz az $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ és $f(\mathbf{u},\mathbf{v})$, skaláris szorzat, és mi az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ normája?
b) Adjunk meg $(\mathbb{R}^2, f)$-ben ortonormált bázist!

7. Legyen $\mathbf{a}_1 = 1/2(1,1,1,1), \mathbf{a}_2 = 1/2(1,-1,1,-1), \mathbf{a}_3 = 1/2(1,1,-1,-1), \mathbf{a}_4 = 1/2(1,-1,1,-1)$
a) Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ ortonormált bázis az $(\mathbb{R}^4, (,))$ standard euklideszi térben!
b) Hogyan kapható meg egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor e bázisra vonatkozó koordinátavektora?
c) Legyen $W = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ altér. Számítsuk ki az $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$ vektor W-re való merőleges vetületét!

8. Tekintsük a 6. feladatbeli euklideszi térben a $\mathcal{B} := \{(1,2),(1,-1)\}$ bázist. Mi lesz a báziscsere mátrixa? Legyen $\mathbf{u}$ koordinátavektora $[\mathbf{u}]_{St}$ és $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$ a standard, illetve a $\mathcal{B}$ bázisban. Hogyan kapható $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$ az $[\mathbf{u}]_{St}$-ből? Hogyan kapható $[f]_{\mathcal{B}}$ Gram-mátrixa $[f]_{St}$-ből?

Házi feladatok

Beadási határidő: február 18.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek hasonlóak $M_2(\mathbb{R})$-ben. Adjuk meg a hasonlósági transzformáció(kat) is! $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ egy skaláris szorzás Gram-mátrixa az $(\mathbb{R}^2, f)$ euklideszi tér $\{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \,\}$ standard bázisában. Alkalmazzuk a Gram–Schmidt-ortogonalizációt az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ standard bázisvektorokra és határozzunk meg egy f-re ortonormált bázist!

3. Adjuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & -9 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix $\mathcal{N}(A), \mathcal{S}(A), \mathcal{O}(A), \mathcal{N}(A^T)$ kitüntetett altereinek egy-egy ortonormált bázisát a standard skaláris szorzásra nézve!

4. Adjuk meg az alábbi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vektorok által kifeszített térnek egy ortonormált bázisát a standard skaláris szorzásra nézve Gram-Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (1,2,1,2),\ \mathbf{v}_3 = (2,4,0,2),\ \mathbf{v}_4 = (1,2,3,6).$$

Számítsuk ki $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vektorok koordinátavektorait erre az ortonormált bázisra nézve!

5. Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{2})(0,0,1,1))$, $\mathbf{a}_3 = (1/\sqrt{2})(0,0,1,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (0,-1,0,0)$ vektorok ortonormált bázist alkotnak az $(\mathbb{R}^4, (\ ,\ ))$ euklideszi térben. Legyen $W := \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$. Számítsuk ki az $\mathbf{x} = (1,1,2,2)$ vektor W-re való merőleges vetületét, és bontsuk az $\mathbf{x}$ vektort egy W-beli és egy $W^{\perp}$-beli komponenens összegére!

6. Mutassuk meg, hogy Z_2^3-ban az $(1,1,0)$ által kifeszített altér merőlegese nem direkt kiegészítő. Adjunk meg, $\mathbb{Z}_2^3$-ban egy direkt kiegészítőt ehhez az altérhez egy bázisának kijelölésével.

7*. Legyen $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ tetszőleges bázis az $(\mathbb{R}^n, (\ ,\ ))$ euklideszi térben. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan $\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ bázis létezik, hogy $(\mathbf{c}_i, \mathbf{b}_j) = \delta_{i,j}$ minden $1 \le i, j \le n$ indexpárra.