1. Mutassuk meg, hogy reguláris mátrixokon az invertálás és a transzponálás felcserélhetők.

2. Mutassuk meg, hogy az $n \times n$-es ortogonális mátrixok csoportot alkotnak, azaz ortogonális mátrixok szorzata ortogonális, inverze ortogonális és az egységmátrix ortogonális.

3. Melyik szemiortogonális az alábbi mátrixok közül? A szemiortogonálisoknak melyik oldali inverze létezik? Adjuk is meg a megfelelő egyoldali inverzeket!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg $\mathbf{A}$ QR-felbontását, valamint teljes QR-felbontását Gram–Schmidt -féle ortogonalizációval!

5. a) Írjuk fel azt a 2×2-es forgatásmátrixot, amely az $(1, 2)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5}, 0)$ vektorba!
b) Írjuk fel a $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1)$ normálvektorú hipersíkra való Householder-tükrözés standard mátrixát!
c) Írjuk fel annak a Householder-tükrözésnek a mátrixát, amely a $v = (1, -1, 1, -1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla, és az első koordináta negatív! Milyen normálvektorú hipersíkra tükröz ez a transzformáció?

6. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

7. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!

8. Tekintsük a 4. feladatbeli $\mathbf{A}$ mátrixot. Határozzuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer egyetlen legjobban közelítő megoldását QR-felbontás segítségével, ha $\mathbf{b} = (0, 0, 0, 1)$. Miért van csak egy legjobban közelítő megoldás?

Házi feladatok

Beadási határidő: február 25.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Melyik szemiortogonális az alábbi mátrixok közül? A szemiortogonálisoknak melyik oldali inverze létezik? Adjuk is meg a megfelelő egyoldali inverzeket! $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. a) Írjuk fel azt a 2×2-es forgatásmátrixot, amely a $(2, -1)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5}, 0)$ vektorba!
b) Adjuk meg azt a Householder-tükrözést, amely a $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla és az első koordináta pozitív.

3. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!

4. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & -8 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását és teljes QR-felbontását Gram–Schmidt-féle ortogonalizációval!

5. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

6. Tekintsük a 4. feladatbeli $\mathbf{A}$ mátrixot. Határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer összes legjobban közelítő megoldását QR-felbontás segítségével, ha $\mathbf{b} = (4, 0, 0, 0)$. Hány legjobban közelítő megoldás van és miért?

7*. Mutassuk meg, hogy az $n \times n$-es valós mátrixokon az $f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$ pozitív definit, szimmetrikus valós bilineáris függvény, azaz skaláris szorzat $M_n[\mathbb{R}]$-en, és ezzel $(M_n[\mathbb{R}], f)$ valós euklideszi tér!