1. Mekkora a $(1, i, 1+i)$ vektor hossza?

2. Számítsuk ki az alábbi két vektor skaláris szorzatát és távolságát! $\mathbf{a} = (1, i, 1+i)$, $\mathbf{b} = (1-i, i, 1+i)$.

3. Végezzük el a Gram–Schmidt–eljárást a $\mathbb{C}^3$-beli $(0, 1, -1)$, $(1+i, 1, 1)$, $(1, i, 1)$ vektorokon!

4. Döntsük el az alábbi mátrixok mindegyikéről, hogy önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális-e?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

5. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{R}]$ mátrix pontosan akkor szimmetrikus, ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay})$.

6. Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix önadjungált és unitér, tehát normális is. Keressünk egy olyan $\mathbf{B}$ mátrixot, amely hasonló $\mathbf{A}$-hoz, de nem normális.(Tehát az normálisság nem hasonlóságra invariáns tulajdonság) Viszont mutassuk meg, hogy ha normális mátrixra egy unitér mátrixszal alkalmazunk hasonlóságot, akkor normális marad.

7. Legyen egy f komplex skaláris szorzás Gram–mátrixa $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$ az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ standard bázisban. Számítsuk ki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ hosszát és skaláris szorzatát a $(\mathbb{C}^2, f)$ euklideszi térben. Adjunk meg egy f-re ortonormált bázist $\mathbb{C}^2$-ben! Legyen $\mathbf{b}_1 = (1, i), \mathbf{b}_2 = (1, -1)$ új bázis. Adjuk meg f Gram–mátrixát ebben az új bázisban!

8. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor pontosan akkor merőleges a konjugáltjára, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a valós euklideszi térben azonos hosszúságú, egymásra merőleges vektorok!

Házi feladatok

Beadási határidő: március 4.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Mekkora a vektorok hossza?
a) $(1-i, 1, -2, 1+i)$
b) $(a+bi, b+ci, c+di)$

2. Számítsuk ki az alábbi két vektor skaláris szorzatát és távolságát!
a) $(1+i, i, -1)$, $(1+i, -i, -1)$
b) $(1-i, i, -2, 1+i)$, $(1+i, 0, 2, 1-i)$.

3. Végezzük el a Gram-Schmidt-eljárást a $\mathbb{C}^3$-beli $(i, 1, i)$, $(i, 1, 0)$, $(i, 0, 0)$ vektorokon!

4. Milyen feltételek mellett unitér a következő mátrix, ha $a, b \in \mathbb{R}$?
$$\begin{bmatrix} a & 0 & bi & 0 \\ 0 & a & 0 & bi \\ bi & 0 & a & 0 \\ 0 & bi & 0 & a \end{bmatrix}$$

5. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{R}]$ mátrix pontosan akkor ortogonális mátrix, ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y})$.

6. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ önadjungált mátrix és $\mathbf{U} \in M_n[\mathbb{C}]$ unitér mátrix, akkor $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ is önadjungált mátrix.

7*. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{m\times n}[\mathbb{R}]$ mátrixokra teljesül:
$$tr^2(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) \leq tr(\mathbf{A}^T\mathbf{A})tr(\mathbf{B}^T\mathbf{B})$$

.