1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok összes sajátértékét és sajátvektorát, valamint sajátaltereit és azok dimenzióját! Van-e n darab lineárisan független sajátvektoruk, ahol n a mátrix mérete? Féligegyszerűek-e? Amelyik igen, arra adjunk meg hozzá hasonló diagonális mátrixot! Van-e ortonormált (valós vagy komplex) sajátvektor rendszerük?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. a) Határozzuk meg az xy síkra való merőleges vetítés mátrixát, annak sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltereit!
b) Határozzuk meg az $(1, 1, 1)$ normálvektorú, origón átmenő síkra való merőleges vetítés mátrixát, annak sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltereit!

3. Melyek igazak egy $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixra?
a) Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek is.
b) Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak is.
c) Ha 0 sajátértéke $\mathbf{A}^2$-nek, akkor 0 sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is.
d) Ha $a^2 = b$ és b sajátértéke $\mathbf{A}^2$-nek, akkor a vagy $-a$ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is.

4. Határozzuk meg, az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! Mutassuk meg, hogy az alábbi mátrixok féligegyszerűek! Adjunk meg mindkét esetben sajátvektorokból álló bázist! Írjuk fel e lineáris transzformációk mátrixát a sajátvektorokból álló bázisban! Diagonalizálás segítségével számítsuk ki e mátrixok 100-adik hatványát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Mutassuk meg, hogy különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek! Speciálisan, ha egy komplex elemű mátrix összes sajátértéke különböző, akkor a mátrix $\mathbb{C}$ felett diagonalizálható, azaz féligegyszerű.

6. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ Határozzuk meg az $\mathbf{A}^2$ és az $\mathbf{A}$ mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, azok algebrai és geometriai multiplicitását és e mátrixok karakterisztikus polinomját!

7. Tegyük fel, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(x-1)x^3$ és a 0 sajátérték geometriai multiplicitása 1. Mit mondhatunk ekkor $\mathbf{A}$ rangjáról? Adjunk meg ilyen mátrixot!

8. Határozzuk meg azt az $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációt, amelynek sajátpárjai: $((1, 0, 1), 3), ((1, 1, 1), 0), (1, -1, 0), 1)$!

Házi feladatok

Beadási határidő: március 11.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1-2. Határozzuk meg az alábbi mátrixok összes sajátértékét és sajátvektorát, valamint sajátaltereit és azok dimenzióját! Van-e n darab lineárisan független sajátvektoruk, ahol n a mátrix mérete? Féligegyszerűek-e? Amelyik igen, arra adjunk meg hozzá hasonló diagonális mátrixot! Van-e ortonormált (valós vagy komplex) sajátvektorrendszerük?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. a) Határozzuk meg az yz síkra való tükrözés mátrixát, annak sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltereit!

b) Határozzuk meg az $(1, 2, -3)$ normálvektorú, origón átmenő síkra való tükrözés mátrixát, annak sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltereit!

4. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! Adjunk meg sajátvektorokból álló bázist, és írjuk fel a lineáris transzformáció mátrixát ebben a bázisban! Diagonalizálás segítségével számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix 100-adik hatványát!

5. Tegyük fel, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(x-1)x^3$ és a 0 sajátérték geometriai multiplicitása 2. Mit mondhatunk ekkor $\mathbf{A}$ rangjáról? Adjunk meg ilyen mátrixot!

6. Határozzuk meg azt az $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációt, amelynek sajátpárjai: $((1, 2, 0), 1), ((1, 0, 1), 2), (1, -1, 1), -1)$!

7*. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n[\mathbb{R}]$ felcserélhető mátrixok mindegyikének van n különböző sajátétéke, akkor közös $\mathbf{C}$ hasonlósági mátrixszal diagonalizálhatók!