1. Mutassuk meg, hogy $M_n[\mathbb{C}]$ mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér az önadjugált mátrixok és a ferdén önadjungált mátrixok altereinek direkt összege, de ezek a komponensek $\mathbb{C}$ fölött nem alkotnak alteret!

2. Legyen V_F egy vektortér, $A : V \to V$ lineáris transzformáció.
a) Mutassuk meg, hogy V pontosan akkor áll elő 1-dimenziós A-invariáns alterek direkt összegeként, ha van V-ben A sajátvektoraiból álló bázis.
b) Mutassuk meg, hogy V pontosan akkor áll elő $k \geq 2$ darab A-invariáns altér direkt összegeként, ha van V-ben olyan B bázis, amelyben A mátrixa k diagonális blokkot tartalmazó blokkdiagonális mátrix.

3. Van-e olyan komplex elemű mátrix, amelynek karakterisztikus és minimálpolinomja a következő?
a) $(x-1)^2(x-2)^2$, $(x-1)(x-2)^2$
b) x^6+x+1, x^2+x+1
c) $-(x-1)^2(x-2)^2(x-5)$, $(x-1)^2(x-2)^2$
d) $(x^3-x-4)^2$, x^3-x-4
Ha van, mutassunk rá példát!

4. a) Mutassuk meg, hogy hasonló mátrixok minimálpolinomjai megegyeznek!
b) Mutassuk meg, hogy bármely invertálható $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixhoz létezik olyan legfeljebb $n-1$-edfokú $p(x)$ polinom, hogy $\mathbf{A}^{-1} = p(\mathbf{A})$!

5. Igazoljuk, hogy, ha egy $\mathbf{A}$ mátrix minden sor- vagy oszlopösszege c, akkor c sajátértéke $\mathbf{A}$-nak!

6. a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlók.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!
c) Határozzuk meg a mátrixok karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!
d) Adjuk meg a sajátértékeket, sajátvektorokat, sajátaltereket mindkét mátrixra!

7. Legyen az $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{R}]$, melynek nem nulla elemei $a_{i,i+1} = 1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, és $a_{n,1} = 1$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ unitéren diagonizálható $\mathbb{C}$ fölött! Adjuk meg $\mathbf{A}$ karakterisztikus- és minimálpolinomját!

8. Keressünk olyan ortonormált bázist $\mathbb{R}^3$-ban, melyre nézve az origón átmenő $(1,1,4)$ irányvektorú egyenesre való φ tükrözés mátrixa diagonális mátrix. Írjuk fel a transzfomáció standard mátrixát, karakterisztikus- és minimálpolinomját!

Házi feladatok

Beadási határidő: március 25.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Írjuk fel az alábbi $\mathbf{A}$ mátrixot egy ferdén önadjungált és egy önadjungált mátrix összegeként!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i-1 & 0 \\ 1 & i & -1 \\ 2+i & 4 & 1-i \end{bmatrix}$$

2. Egy $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ lineáris transzformáció standard mátrixa az az $\mathbf{A}$ blokkdiagonális mátrix, amelynek diagonális blokkjai rendre $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$, ahol $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in M_2[\mathbb{R}]$ a $60°$-os, illetve $30°$-os forgatásmátrix, és $\mathbf{X}_3 = [-1] \in M_1[\mathbb{R}]$. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrixot, és adjuk meg $\mathbb{R}^5$ felbontását $\mathbf{A}$-invariáns alterek direkt összegére a megfelelő alterek egy-egy bázisának megadásával!

3. Van-e olyan komplex elemű mátrix, amelynek karakterisztikus és minimálpolinomja a következő?
a) $(x-1)^2(x-2)^2$, $(x-1)(x-2)$
b) $-(x+1)^2(x-2)^3$, $(x+1)(x-2)^2$
c) $-(x+1)^2(x+2)^2(x-3)$, $(x+1)^2(x+2)^2$

4. a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlók:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!
c) Határozzuk meg a mátrixok karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!
d) Adjuk meg a sajátértékeket, sajátvektorokat, sajátaltereket mindkét mátrixra!

5. Tekintsük az alábbi $\mathbf{P}$ permutációs mátrixot. permutációs mátrix. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}$ unitéren diagonizálható $\mathbb{C}$ fölött! Adjuk is meg azt az unitér mátrixot, amellyel diagonalizálhatjuk, valamint $\mathbf{P}$ karakterisztikus- és minimálpolinomját!

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Keressünk olyan ortonormált bázist $\mathbb{R}^3$-ban, melyre nézve az origón átmenő $(4, 1, 1)$ irányvektorú egyenesre való φ vetítés mátrixa diagonális mátrix. Írjuk fel a transzfomáció standard mátrixát, karakterisztikus- és minimálpolinomját!

7*. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in M_2[\mathbb{R}]$ diagonalizálható mátrix λ_1, λ_2 sajátétékekkel, és $p(x)$ az $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$ alappontokhoz és az $y_1 = \lambda_1^{100}$, $y_2 = \lambda_2^{100}$ értékekhez tartozó Lagrange-féle interpolációs polinom, akkor $\mathbf{A}^{100} = p(\mathbf{A})$.