1. A mátrix méretére vonatkozó teljes indukcióval mutassuk meg, hogy egy felső háromszögmátrix pontosan akkor normális, ha diagonális.

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix saját- és spektrálfelbontását és ennek segítségével a 12-edik hatványát! $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix Schur-felbontását! $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

4. Mutassuk meg, hogy a Schur-felbontásnál pontosan akkor kapunk diagonális mátrixot, ha a kiindulási mátrix normális!

5. Legyen $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in M_n[\mathbb{C}]$, és jelölje $\mathbf{A}$ sajátértékeit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Igazoljuk, hogy $\mathbf{A}$ pontosan akkor normális mátrix, ha $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$. (Használjuk a Schur-felbontást!)

6. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Mennyi az $\mathbf{A}$ rangja? Mit mondhatunk a 0-tól különböző sajátértékek számáról és típusáról?

b) Az előző feladat állítását és a mátrix nyomát felhasználva számítsuk ki a sajátértékeket!

7. Hozzuk kanonikus alakra az $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!

Házi feladatok

Beadási határidő: április 1.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix spektrálfelbontását, és ennek segítségével számítsuk ki a mátrix 20-adik hatványát!

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix Schur-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Az alábbi mátrix két elemét nem ismerjük, de tudjuk, hogy egyik sajátértéke 3. Mi a másik két sajátértéke? $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$.

4. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Mennyi az $\mathbf{A}$ rangja? Mit mondhatunk a 0-tól különböző sajátértékek számáról és típusáról?

b) Számítsuk ki a sajátértékeket!

5. Hozzuk kanonikus alakra az $8y^2 + 6xy + 6x - 2y - 1 = 0$ egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!

6. Tekintsük az $x^2 - y^2 = 0$ másodrendű görbét. Forgassuk el a koordinátarendszert $+60^0$-kal. Adjuk meg a másodrendű görbe egyenletét az új bázisban! Ábrázoljuk a görbét és a két koordinátarendszer tengelyeit!

7*. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixra $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) = 0$ teljesül minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorral a $\mathbb{C}^n$-beli skaláris szorzásra nézve, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Lássuk be, hogy a fenti állítás valós verziója nem igaz, azaz valamely n-re mutassunk olyan $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{R}]$ nem nulla mátrixot, amelyre $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax}) = 0$ teljesül minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorral az $\mathbb{R}^n$-beli skaláris szorzásra nézve!