1. Hozzuk diagonális alakra az alábbi kvadratikus alakokat! Adjunk meg egy-egy bázist, amelyben diagonális alakúak! Döntsük el, hogy milyen a jellegük! Adjunk meg olyan bilineáris függvényeket, melyekhez ezek tartoznak! Elfajulóak-e ezek a bilineáris függvények?

a) $x_1^2 + x_1x_2$

b) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

2. a) Mi a $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2$ bilineáris függvény Gram-mátrixa a standard bázisban és az $\{(1, 1), (0, 1)\}$ bázisban? Elfajuló-e ez a bilineáris függvény?

b) Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak?

c) Mit mondhatunk a kvadratikus alak jellegéről?

3. Egy valós bilineáris függvény Gram-mátrixa standard bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!

b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

4. Egy $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$-en értelmezett komplex bilineáris függvény $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = i\overline{u}_1v_2 - i\overline{u}_2v_1$.

a) Írjuk fel a mátrixát!

b) Hermite-féle-e a bilineáris függvény?

c) Határozzuk meg a jellegét!

d) Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben g Gram-mátrixa diagonális! Írjuk fel benne a kvadratikus alakot!

5. Mi a jellege az alábbi szimmetrikus mátrixoknak?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Szimmetrikus eliminációval hozzuk a $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ Gram-mátrixú bilineáris függvény Gram-mátrixát diagonális alakra! Milyen báziscserének felel ez meg?

7. Mutassuk meg, hogy ha egy szimmetrikus bilineáris függvény Gram-mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, akkor alkalmas bázisban a mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg a báziscsere-transzformáció mátrixát!

8. Bázisával adjuk meg az $\mathbb{R}^3$ tér $(-1, 1, 0)$ és és $(-1, 0, 1)$ vektorai által generált altér merőlegesét a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ szimmetrikus bilineáris függvényre nézve, ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Elfajuló-e ez a bilineáris függvény?

Házi feladatok

Beadási határidő: április 8.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Hozzuk diagonális alakra az alábbi kvadratikus alakokat! Adjunk meg egy-egy bázist, amelyben diagonális alakúak! Döntsük el, hogy milyen a jellegük! Adjuk meg mindegyikhez a hozzá tartozó szimmetrikus bilineáris függvényt, és adjunk meg valamelyikhez egy másik, elfajuló bilineáris függvényt is.

a) $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$

b) $x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 8x_2x_3$

2. a) Mi a $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_2$ bilineáris függvény Gram-mátrixa a standard bázisban és az $\{(1, -1), (1, 1)\}$ bázisban?

b) Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak?

c) Mit mondhatunk a kvadratikus alak jellegéről?

3. Egy valós bilineáris függvény Gram-mátrixa standard bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!

b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

4. Egy $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$-en értelmezett komplex bilineáris függvény $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2i\overline{u}_1v_2 - 2i\overline{u}_2v_1$.

a) Írjuk fel a mátrixát!

b) Hermite-féle-e a bilineáris függvény?

c) Határozzuk meg a jellegét!

d) Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben g Gram-mátrixa diagonális! Írjuk fel benne a kvadratikus alakot!

5. Mi a jellege az alábbi szimmetrikus mátrixnak? Szimmetrikus eliminációval hozzuk diagonális alakra! Milyen báziscserének felel ez meg?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Bázisával adjuk meg az $\mathbb{R}^3$ tér $(1, 1, 0)$ és és $(-1, 0, 1)$ vektorai által generált altér merőlegesét a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ szimmetrikus bilineáris függvényre nézve, ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Elfajuló-e ez a bilineáris függvény?

7*. Legyen $f : V \times V \to \mathbb{R}$ szimmetrikus (vagy alternáló) bilineáris függvény, $dimV$ véges és $W^\perp$ jelöli a W altérre f-merőleges vektorokat. Mutassuk meg, hogy $dim(W^\perp) \geq dim(V) - dim(W)$ és ha f nem elfajuló, akkor egyenlőség is van.