

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált és teljes SVD-felbontását!

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Az 1. feladatbeli mátrixoknál a felbontást írjuk fel diadikus alakban is! Mik ezeknek a mátrixoknak az adott szinguláris értékekhez tartozó bal- és jobboldali szinguláris vektorai? Adjuk meg az egyes mátrixok nullterének és oszlopterének egy-egy ortonormált bázisát SVD segítségével!
3. Számítsuk ki az 1.-beli mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével!
4. Számítsuk ki az 1. feladatbeli négyzetes mátrixok poláris felbontását SVD segítségével!
5. Adjuk meg az 1.-beli nem 1-rangú mátrixok legjobb 1-rangú közelítését! Mekkora a közelítő mátrix eltérése Frobenius-normában?
6. Adjunk meg olyan valós szimmerikus nem diagonális mátrixot, amelynek minden sarokaldeterminánsa nemnegatív és a mátrix negatív szemidefinit!
7. Mutassuk meg, hogy ha egy  $\mathbf{A}$  komplex négyzetes mátrix poláris felbontásában  $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{S}$ , azaz a pozitív szemidefinit és az unitér rész felcserélhető, akkor  $\mathbf{A}$  normális mátrix!
8. Legyen  $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{U}$  poláris felbontás, ahol  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  és  $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Határozzuk meg  $\mathbf{A}$  egy SVD-felbontását!
9. Határozzuk meg a 8. feladatbeli  $\mathbf{S}$  mátrix négyzetgyökét!

**Házi feladatok**

Beadási határidő: április 15.

*A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!*

- Határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált és teljes SVD-felbontását!  
a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$       c)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
- Az 1. feladatbeli mátrixoknál a felbontást írjuk fel diadikus alakban is! Mik ezeknek a mátrixoknak az adott szinguláris értékekhez tartozó bal- és jobboldali szinguláris vektorai? Adjuk meg az egyes mátrixok nullterének és oszlopterének egy-egy ortonormált bázisát SVD segítségével!
- Számítsuk ki az 1.-beli mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével!
- Számítsuk ki az 1. feladatbeli négyzetes mátrixok poláris felbontását SVD segítségével!
- Adjuk meg az 1.-beli nem 1-rangú mátrixok legjobb 1-rangú közelítését! Mekkora a közelítő mátrix eltérése Frobenius-normában?
- Adjunk meg olyan valós szimmetrikus nem diagonális mátrixot, amelynek minden sarokaldeterminánsa nulla és a mátrix indefinit!
- \*. Tegyük fel, hogy  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  szimmetrikus (vagy alternáló) bilineáris függvény,  $\dim V$  véges, és  $W^\perp$  jelöli a  $W$  altérre  $f$ -merőleges vektorok által alkotott alteret. Mutassuk meg, hogy ha  $f$  nem elfajuló, és  $f_{W \times W}$  sem elfajuló, akkor  $\dim W^\perp = \dim V - \dim(W)$ ,  $V = W \oplus W^\perp$  és  $(W^\perp)^\perp = W$ !