1. Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja? Adjuk meg a determinánsosztókat és invariáns faktorokat is!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Határozzuk meg a 1. feladatbeli $\mathbf{A}$ mátrixokra $\mathbf{J}^{100}$, $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{\mathbf{A}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ értékét, ahol $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakja! Szükség esetén használjunk Hermite-polinomot!

3. Legyen $\mathbf{A}$ 10×10-es valós mátrix! Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját! Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?

a) $(5, 6, \ldots)$;

b) $(9, 8, 7, \ldots, 4, 4, \ldots)$;

4. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ Az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}$ hatványainak rangja rendre $8, 6, 5, 4, 4$. Az $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}$ hatványainak rangja rendre $7, 6, 6$. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját!

5. Mutassuk meg, hogy ha két 3×3-as vagy 2×2-es komplex mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.

6. Van-e olyan 3×3-as $\mathbb{Q}$-feletti mátrix, melynek minimálpolinomja

a) $x^2 - 2$

b) $x^2 + x$

7. Mi lehet Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, melynek

a) karakterisztikus polinomja $(x-1)^6$, minimálpolinomja $(x-1)^4$, az 1-hez tartozó V_1 sajátaltér dimenziója 2;

b) karakterisztikus polinomja $-(x-\lambda)^7$, minimálpolinomja $(x-\lambda)^3$, $\dim(V_\lambda) = 3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?

8. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek

a) karakterisztikus polinomja $-(x-1)^3(x-3)^4$;

b) minimálpolinomja $(x+2)^6$, és sajátaltere 2-dimenziós?

9. Mi lehet az $\mathbf{A}^2$ mátrix minimálpolinomja, ha $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ minimálpolinomja $(x+1)^2$?

Házi feladatok

Beadási határidő: április 29.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja? Adjuk meg a determinánsosztókat és invariáns faktorokat is!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Határozzuk meg a 1. feladatbeli $\mathbf{A}$ mátrixokra $\mathbf{J}^{120}$, $\mathbf{A}^{120}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{\mathbf{A}}$, $e^{5\mathbf{A}}$ értékét, ahol $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakja! Szükség esetén használjunk Hermite-polinomot!

3. Legyen $\mathbf{A}$ 10×10-es valós mátrix! Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját! Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?
a) $(10, 9, 8, \ldots)$;
b) $(8, 5, \ldots)$.

4. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}$ hatványainak nullitása rendre $2, 4, 5, 6, 6$. Az $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}$ hatványainak nullitása rendre $3, 4, 4$. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját!

5. Mi lehet Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, melynek
a) karakterisztikus polinomja $-(x-2)^7$, minimálpolinomja $(x-2)^4$, az 2-höz tartozó V_2 sajátaltér dimenziója 2;
b) karakterisztikus polinomja $(x-\lambda)^8$, minimálpolinomja $(x-\lambda)^4$, $\dim(V_\lambda) = 3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?

6. Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek
a) karakterisztikus polinomja $-(x-2)^5(x+3)^2$;
b) minimálpolinomja $(x-1)^5$, és sajátaltere 2-dimenziós?

7*. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es λ_0 sajátértékű Jordan-blokk. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$ blokkmátrix minimálpolinomja $(x-\lambda_0)^{n+1}$. Mi a $\mathbf{B}$ mátrix Jordan-féle normálalakja?