1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakját, egy Jordan-bázisát és a Jordan-láncokat!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrixok komplex és valós Jordan-féle normálalakját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$$

3. Keressük meg azt a p Hermite-féle interpolációs polinomot, melyre $e^{\mathbf{A}t} = p(\mathbf{A})$, ahol t valós paraméter! Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{J}$ Jordan-alakját és egy Jordan-bázist. Ennek segítségével is számítsuk ki $e^{\mathbf{A}t}$-t!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Mutassuk meg, hogy minden négyzetes komplex elemű mátrix hasonló a transzponáltjához! (Használjuk a determinánsosztókat!)

5. Mutassuk meg, hogy, ha egy komplex elemű négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix k-adik hatványa az egységmátrix, akkor $\mathbf{A}$ diagonalizálható.

6. Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak van négyzetgyöke! Mutassuk meg, hogy szinguláris mátrixokra ez nem feltétlenül igaz! Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix négyzetgyökét!

7. Adjunk új bizonyítást a Cayley-Hamilton-tételre a mátrixok Jordan-féle normálalakját használva!

8. Hasonlóság erejéig hány olyan 3×3-as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a köbével?

9. Mutassuk meg, hogy minden $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, n-edfokú 1-főegyütthatós, valós polinomhoz van olyan $n \times n$-es valós mátrix, aminek $p(x)$ vagy $-p(x)$ karakterisztikus polinomja, nevezetesen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

az úgynevezett kísérőmátrix. Mutassuk meg, hogy ennek a mátrixnak a karakterisztikus polinomja egyúttal minimálpolinomja is!

Házi feladatok

Beadási határidő: május 6.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-féle normálalakját, egy Jordan-bázisát és a Jordan-láncokat!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Határozzuk meg $e^{\mathbf{A}t}$-t az 1. feladatbeli $\mathbf{A}$ mátrixra!

3. Tegyük fel, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $-x^5$, minimálpolinomja x^3, és a rangja 3. Adjuk meg $\mathbf{A}$ Jordan-normálalakját! Mi a Jordan-normálalakja és a minimálpolinomja az $\mathbf{A}^2$ mátrixnak?

4. Hasonlóság erejéig hány olyan 3×3-as komplex mátrix van, amelynek a köbe az egységmátrix?

5. Az 1. feladatbeli $\mathbf{A}$ mátrixnak számítsuk ki egy négyzetgyökét!

6. Írjunk fel egy olyan valós 4×4-es mátrixot, melynek karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja is $x^4 + 2x^2 + 1$! Mi ennek a mátrixnak a Jordan-alakja, illetve valós Jordan-alakja?

7*. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^2$ komplex mátrixok minimálpolinomja megegyezik, akkor $\mathbf{A}$ minden sajátértéke 0 vagy páratlan rendű komplex egységgyök, és a 0 legfeljebb 1-szeres gyöke a minimálpolinomnak!