1. a) Rajzoljuk le az alábbi mátrixok sor és oszlop szerinti Gersgorin-köreit!
b) Jelöljük be a sajátértékeket és a mátrixok spektrálsugarát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi **A** mátrixnak van legalább két valós sajátértéke! (Használjuk a Gersgorin-köröket!)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg az **A** és **B** mátrixok Frobenius-, 1-, 2- (spektrális) és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Tekintsük az alábbi **A** mátrix sorterét, $\mathcal{V}$-t, és ebben az első két sorvektor által kifeszített alteret, $\mathcal{W}$-t. Határozzuk meg a $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ faktortér dimenzióját! Adjunk meg a faktortérben egy bázist annak segítségével, hogy kiegészítjük $\mathcal{W}$ egy bázisát $\mathcal{V}$ egy bázisává!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Mutassuk meg, hogy egy 2×2-es mátrixhoz annak nyomát rendelő $M_2[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$ leképezés lineáris funkcionál! Keressünk egy olyan $M_2[\mathbb{R}]$-beli elemet, amellyel való skaláris szorzás épp ezt a funkcionált adja meg, ha a skaláris szorzás a sorfolytonosan írt mátrixoknak mint $\mathbb{R}^4$-beli vektoroknak a szokásos euklideszi skalárszorzata.

6. Mutassuk meg, hogy egy r rangú márix minimálpoolinomjának foka legfeljebb $r + 1$.

7. Hány olyan páronként nem hasonló, nem diagonalizálható 3×3-as komplex mátrix van, melynek determinánsa 0, és nyoma 1?

Házi feladatok

Beadási határidő: május 13.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. a) Rajzoljuk le az alábbi **A** mátrix sor és oszlop szerinti Gersgorin-köreit!
b) A sajátértékek kiszámolása nélkül adjuk meg azt a halmazt, ahová e sajátértékek eshetnek.
b) Ezután számoljuk ki a sajátértékeket és a mátrixok spektrálsugarát, és jelöljük be a rajzon!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Az alábbi **A** mátrixnak mátrixnak van tiszta képzetes sajátértéke. Adjunk ennek abszolút értékére becslést a Gersgorin-körök segítségvel!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1-i \\ 1 & 1 & -1-i \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg az 1. feladatbeli **C** mátrix Frobenius-, 1- és ∞-normáját!

4. Tekintsük az alábbi **A** mátrix sorterét, $\mathcal{V}$-t és ebben az első sorvektor által kifeszített alteret, $\mathcal{W}$-t. Határozzuk meg a $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ faktortér dimenzióját! Adjunk meg a faktortérben egy bázist annak segítségével, hogy kiegészítjük $\mathcal{W}$ egy bázisát $\mathcal{V}$ egy bázisává!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Mutassuk meg, hogy egy 2×2-es mátrixhoz az első sor első elemét rendelő $M_2[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$ leképezés lineáris funkcionál! Keressünk egy olyan $M_2[\mathbb{R}]$-beli elemet, amellyel való skaláris szorzás épp ezt a funkcionált adja meg, ha a skaláris szorzás a sorfolytonosan írt mátrixoknak mint $\mathbb{R}^4$-beli vektoroknak a szokásos euklideszi skalárszorzata.

6. Hány olyan páronként nem hasonló, nem diagonalizálható 4×4-as komplex mátrix van, melynek determinánsa 0, nyoma 1, és sajátértéke a 2? Adjuk meg a mátrixok Jordan-féle normálalakját!

7*. Mutassuk meg, hogy ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ az $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrix sajátértékei, akkor $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$ felülről becsülhető **A** Frobenius-normájának négyzetével, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha **A** normális mátrix!