**1.** *Mutassuk meg, hogy az alábbiak vektorterek! Hány dimenziósak? Adjunk meg bennük bázist!*
*a)* $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$
*b)* $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$
*c) Az* $n \times n$*-es valós nulla nyomú mátrixok* $\mathbb{R}$ *felett.*
*d) Az* $n \times n$*-es komplex nulla nyomú mátrixok* $\mathbb{R}$ *felett.*
*e) Az* $\mathbb{R}[x, y]$ $\mathbb{R}$*-vektortérben a legfeljebb* 3*-adfokú polinomok.*
*f) Az* $\mathbb{R}[x, y]$ $\mathbb{R}$*-vektortérben a legfeljebb* 3*-adfokú szimmetrikus polinomok*
*g) Adott* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *mátrixszal felcserélhető* $2 \times 2$ *valós mátrixok.*

*Megoldás:* a) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ bázisa $\{\, 1, i \,\}$, dimenziója 2.
b) $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ bázisa $\{\, 1 \,\}$, dimenziója 1.
c) Bázisa $\{\, E_{jk} \mid j \neq k \,\} \cup \{\, E_{11} - E_{kk} \mid k > 1 \,\}$, dimenziója $n^2 - 1$.
d) Bázisa $\{\, E_{jk},\ iE_{jk} \mid j \neq k \,\} \cup \{\, E_{11} - E_{kk},\ iE_{11} - iE_{kk} \mid k > 1 \,\}$, dimenziója $2n^2 - 2$.
e) Bázisa $\{\, 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3 \,\}$, dimenziója 10..
f) Bázisa $\{\, 1,\ x + y,\ x^2 + y^2,\ xy, x^3 + y^3,\ x^2y + xy^2 \,\}$, dimenziója 6.
g) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$-re

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} \ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix} z & u \\ x - z & y - u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x - y \\ u & z - u \end{bmatrix} \ \Leftrightarrow\ \begin{matrix} x = y \\ u = x - y \end{matrix} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x - y \end{bmatrix}$$

Tehát a vektortér $\left\{ x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Ebből látható, hogy $\{\, \mathbf{I}, \mathbf{A} \,\}$ generátorrendszere ennek a vektortérnek, s mivel ezek nyilvánvalóan függetlenek, bázisa is. Következésképpen a vektortér dimenziója 2.

**2.** *Legyen* $V$ $\mathbb{Z}_p$ *feletti* $n$ *dimenziós vektortér!*
*a) Hány* 1*-dimenziós altere van* $V$*-nek?*
*b) Hány* $n - 1$*-dimenziós altere van* $V$*-nek?*
*c) Hány* $k$*-dimenziós altere van* $V$*-nek?*

*Megoldás:* a) Az egydimenziós alterek egyetlen nemnulla vektornak (az altér tetszőleges nemnulla vektorának) a skalárszorosaiból áll. A teljes $n$-dimenziós térnek $p^n - 1$ nemnulla vektora van, és $p - 1$ generálja ugyanazt az alteret, így az egydimenziós alterek száma $\dfrac{p^n - 1}{p - 1} = p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1$.

b) $V$ izomorf a $\mathbb{Z}_p^n$ vektortérrel, tehát elég az utóbbinak az $(n-1)$-dimenziós altereit megszámolni. Az $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum u_i v_i$ skalárszorzatra nézve igaz, hogy tetszőleges $W$ altérre $\dim W + \dim W^{\perp} = n$, mert $W$ a $W$ egy bázisából mint sorokból álló mátrix sortere, $W^{\perp}$ pedig ennek a mátrixnak a nulltere. Másrészt $(W^{\perp})^{\perp} \geq W$ nyilvánvaló, és így a dimenziók közötti összefüggés miatt $(W^{\perp})^{\perp} = W$ is igaz. Tehát a $W \leftrightarrow W^{\perp}$ megfeleltetés bijekciót ad a $k$-dimenziós és az $(n-k)$-dimenziós alterek között. Következésképpen az $(n-1)$-dimenziós alterek száma megegyezik az 1-dimenziós alterek számával, azaz $p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + 1$.

c) Számoljuk össze a $k$-dimenziós alterek lehetséges bázisait, azaz a $k$ elemből álló független vektorsorozatokat, és ezt osszuk el azzal a számmal, ahány különböző (rendezett) bázisa van egy $k$-dimenziós altérnek. Egy független vektorsorozatot úgy választhatunk ki, hogy az első eleme tetszőleges nemnulla vektor lehet, a második bármi, ami ennek nem skalárszorosa, …, az $(i + 1)$-edik bármi, ami nem lineáris kombinációja az első $i$ független vektornak, azaz $(p^n - p^i)$-féle vektor lehet. Tehát a $k$-dimenziós alterek száma

$$\frac{(p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{k-1})}{(p^k-1)(p^k-p)\cdots(p^k-p^{k-1})}.$$

**3.** *Adjuk meg az $f:(x,y,z)\to(x+y-2z, x+z, 2x+y-z, -x-z)$ lineáris leképezés márixát standard bázisban. Mennyi a rangja? Hány dimenziós $f$ magtere és képtere? Adjuk meg a magtérnek és a képtérnek egy-egy bázisát!*

*Megoldás:* A rangot, képteret és magteret is a mátrix (redukált) lépcsős alakjának a segítségével tudjuk meghatározni.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&0&1\\2&1&-1\\-1&0&-1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&-1&3\\0&-1&3\\0&1&-3\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ rangja 2, mert a lépcsős alaknak két nemnulla sora van. Ebből következik, hogy a képtér 2-dimenziós, a magtér dimenziója pedig $3-2=1$. A képtér bázisa az $\mathbf{A}$ első két oszlopa, $\{(1,1,2,-1),(1,0,1,0)\}$, mert a lépcsős alakban az első két oszlopban van vezérelem. A magtér bázisának meghatározásához az $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldását kell felírni: $\mathbf{x}=(-t,3t,t)=t(-1,3,1)$ $(t\in\mathbb{R})$, tehát a magtér bázisa $\{(-1,3,1)\}$.

**4.** *Legyen $V$ véges dimenziós vektortér, és $f:V\to V$ lineáris transzformáció. Mutassuk meg, hogy vagy $V=\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f$, vagy $f^2$ rangja kisebb $f$ rangjánál!*

*Megoldás:* Mivel $\dim\operatorname{Im} f+\dim\operatorname{Ker} f=\dim V$, akkor és csak akkor lesz $V$ a képtér és a magtér direkt összege, ha $\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} f=0$. Tehát ha $V\neq\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f$, akkor $\exists\mathbf{v}\in\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Ker} f$ nemnulla vektor $\Rightarrow\exists\mathbf{w}\in V$, hogy $f(\mathbf{w})=\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ és $f^2(\mathbf{w})=f(\mathbf{v})=0$. De az nyilvánvaló, hogy $\operatorname{Ker} f\leq\operatorname{Ker} f^2$, és az előbbiekből következik, hogy $\mathbf{w}\in\operatorname{Ker} f^2\setminus\operatorname{Ker} f$, tehát $\dim\operatorname{Ker} f^2>\dim\operatorname{Ker} f$, amiből $r(f^2)=\dim V-\dim\operatorname{Ker} f^2<\dim V-\dim\operatorname{Ker} f=r(f)$.

**5.** *Adjuk meg a mátrixát a következő lineáris leképezéseknek a megadott bázisban (vagy bázispárban)!*
*Adjuk meg a képtér és a magtér egy-egy bázisát!*

a) *$f(x,y,z)=(x+2y-z, x-y+z)$ standard bázisban, illetve a $\mathcal{B}_1'=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ és $\mathcal{B}_2'=\{(1,1),(2,3)\}$ bázispárban!*

b) *az $x=t, y=2t, z=-t$ tengely körüli $90°$-os forgatás a standard bázisban!*

c) *a $3\times3$-as valós mátrixokon az $A\to A+A^T$ leképezés a standard bázisban!*

d) *A $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ vektortéren egy $z=a+bi$ komplex számmal való szorzás mátrixát a $\mathcal{B}_1=\{1,i\}$ és a $\mathcal{B}_1'=\{1+i,1-i\}$ bázisban.*

*Megoldás:* a) $\mathbf{A}=[f]_{St\leftarrow St}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{P}=[\mathrm{id}]_{St\leftarrow\mathcal{B}_1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$,

$\mathbf{Q}=[\mathrm{id}]_{St\leftarrow\mathcal{B}_2}=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$, $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2\leftarrow St}=\mathbf{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}$, $[f]_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}_1}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=$

$$\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&3&-4\\-3&-1&2\end{bmatrix}.$$

b) Először egy kényelmes bázisban írjuk föl a mátrixot, aztán áttérünk a standard bázisra. Álljon a $\mathcal{B}$ bázis a tengely irányvektorából, $(1,2,-1)$-ből, és két erre és egymásra merőleges, azonos hosszúságú vektorból. Még célszerűbb, ha csupa egységvektort választunk. $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$, $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ és $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}(2,-2,-2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$. Ekkor az áttérés $\mathbf{Q}$ mátrixa ortogonális, tehát ha a $\mathcal{B}$ bázisban felírt mátrix $\mathbf{B}$, akkor a standard mátrix $\mathbf{A} = \mathbf{QBQ}^{-1} = \mathbf{QBQ}^T$.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2+\sqrt{6} & -1+2\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{6} & 4 & -2-\sqrt{6} \\ -1-2\sqrt{6} & -2+\sqrt{6} & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 & x_2+x_4 & x_3+x_7 \\ x_2+x_4 & 2x_5 & x_6+x_8 \\ x_3+x_7 & x_6+x_8 & 2x_9 \end{bmatrix}$$

Ebből leolvasható, a standard $\{\, E_{ij} \mid 1 \le i,j \le 3 \,\}$ bázisban a koordinátavektorokon való hatás, és abból a transzformáció $\mathbf{M}$ mátrixa:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2+x_4 \\ x_3+x_7 \\ x_2+x_4 \\ 2x_5 \\ x_6+x_8 \\ x_3+x_7 \\ x_6+x_8 \\ 2x_9 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&2&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix}$$

**6.** *Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, melyre $f(1,1,0) = (1,0,1)$, $f(1,0,1) = (0,1,1)$ és $f(0,1,1) = (1,1,0)$. Adjuk meg $f$ mátrixát a $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ bázisban és a standard bázisban is! Milyen vektorokat fixál ez a leképezés és mi ez a lekápezés?*

*Megoldás:* Vegyük észre, hogy $f$ hatása a $\mathcal{B}$ bázison $\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{b}_3 \mapsto \mathbf{b}_1$, így a $\mathcal{B}$-ben felírt $\mathbf{B}$ mátrixa, és abból a $\mathbf{P}$ áttérési mátrixszal kiszámított standard $\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^{-1}$ mátrixa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ez a leképezés az $(1,1,1)$ irányvektorú, origón átmenő tengely körüli $120°$-os, az irányvektor csúcsa felől nézve negatív irányú, forgatás (a $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ egységkocka origóval szomszédos három csúcsát permutálja ciklikusan, tehát az origóból induló testátló körüli forgatás). Csak a forgatás tengelyébe eső vektorokat, azaz az $(1,1,1)$ skalárszorosait hagyja helyben.