1. *Milyen geometriai transzformációkat írnak le az alábbi ortogonális mátrixok* $\mathbb{R}^2$*-ben? Melyek hasonlóak?* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldás: $\mathbf{A} : \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 \mapsto -\mathbf{e}_2$, ugyanúgy, mint az x tengelyre való tükrözés. Mivel az utóbbi is lineáris transzformáció, és egy bázison való hatás egyértelműen meghatározza a lineáris transzformációkat, $\mathbf{A}$ csak az x tengelyre való tükrözés lehet. Hasonlóan,
$\mathbf{B} : \mathbf{e}_1 \mapsto -\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{B}$ az origó körüli $-90°$-os forgatás,
$\mathbf{C} : \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{C}$ az $y = x$ egyenesre való tükrözés.
A determináns, nyom, rang invariánsak a hasonlóságra, így $\mathbf{A} \not\sim \mathbf{B} \not\sim \mathbf{C}$ (a determinánsuk különbözik), viszont $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$ hasonlók, mert mindkettő a síknak egy tengelyes tükrözése, tehát egy olyan bázisban, amely a tengely irányvektorából és egy rá merőleges vektorból áll (az $\mathbf{A}$ esetében ez $\{\,\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\,\}$, a $\mathbf{C}$ esetében például $\{(1,1), (-1,1)\,\}$), a mátrixa a $\mathrm{diag}(1, -1)$ diagonális mátrix.
Ha nem tudjuk könnyen azonos szép alakra hozni a két mátrixot, akkor ellenőrizhetjük a hasonlóságot azzal is, hogy ismeretlen $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ mátrixra megoldjuk a $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, azaz az ezzel (a $|\mathbf{P}| \neq 0$ feltétel mellett) ekvivalens $\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{P}$ lineáris egyenletrendszert az ismeretlen x, y, z, u-ra: felírjuk az általános megoldást, és keresünk egy olyan behelyettesítést (ha van), amelyre $xu - yz \neq 0$. Ez itt $x = y$, $u = -z$, tehát $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x & x \\ z & -z \end{bmatrix}$, $|\mathbf{P}| = -2xz$, így pl. $x = z = 1$ megfelel, azaz $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$-gyel $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{A}$.

2. *Mekkora szöget zárnak be a* $(0, 1, 2, 3, 4)$ *és a* $(3, 1, 4, 2, 0)$ *vektorok és mi a normájuk az* $(\mathbb{R}^5, (\ ,\ ))$ *standard euklideszi térben?*

Megoldás: Az $\mathbf{u} = (0, 1, 2, 3, 4)$ és $\mathbf{v} = (3, 1, 4, 2, 0)$ vektorokra $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{30}$, és a bezárt φ szög koszinusza $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, amiből $\varphi = 60°$.

3. *Adjuk meg az alábbi* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ *vektorok által kifeszített térnek egy ortonormált bázisát a standard skaláris szorzásra nézve Gram–Schmidt-ortogonalizációval!*

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, -1),\ \mathbf{v}_2 = (2, 0, 0, 0),\ \mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 1),\ \mathbf{v}_4 = (1, 3, 1, -1)$$

Megoldás: Először csak ortogonalizálunk, aztán normálunk. Egy-egy ortogonalizálás után az új vektort helyettesíthetjük a skalárszorosával, ha az szebb.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, -1)$,
$\mathbf{c}_2' = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{c}_1,\mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{c}_1\|^2}\mathbf{c}_1 = (2, 0, 0, 0) - \frac{0}{2}(0, 1, 0, -1) = (2, 0, 0, 0)$, helyette jobb: $\mathbf{c}_2 = (1, 0, 0, 0)$.
$\mathbf{c}_3' = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{c}_1,\mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{c}_1\|^3}\mathbf{c}_1 - \frac{(\mathbf{c}_2,\mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{c}_2\|^3}\mathbf{c}_2 = (1, -1, 0, 1) + \frac{2}{2}(0, 1, 0, -1) - \frac{1}{1}(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{c}_3$.
Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{v}_3$ függ $\{\,\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\,\}$-től, így a harmadik vektor elhagyható, és $\mathbf{c}_4$-et a negyedik vektornak a $\{\,\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2\,\}$-re való ortogonalizálásával kapjuk.
$\mathbf{c}_4' = \mathbf{v}_4 - \frac{(\mathbf{c}_1,\mathbf{v}_4)}{\|\mathbf{c}_1\|^3}\mathbf{c}_1 - \frac{(\mathbf{c}_2,\mathbf{v}_4)}{\|\mathbf{c}_2\|^3}\mathbf{c}_2 = (1, 3, 1, -1) - \frac{4}{2}(0, 1, 0, -1) - \frac{1}{1}(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 1, 1) \Rightarrow$ $\mathbf{c}_4 = (0, 1, 1, 1)$.
Tehát a $\{\,\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\,\}$ vektorrendszernek megfelelő ortogonális rendszer $\{(0, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\,\}$, és a generált altér ortonormált bázisa ebből $\{\,\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1),\ (1, 0, 0, 0),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 1)\,\}$.

Az ortogonalizálást elvégezhetjük mátrixosan is, ahol a vektorokat oszlopokként írjuk: ez később a QR-felbontásnál közvetlenül alkalmazható lesz. A módszernél a $[\mathbf{v}_1|\ldots|\mathbf{v}_k]$ mátrixból indulunk ki, elemi oszlopműveleteket végzünk úgy, hogy az első i vektor generálta altér ne változzon, tehát nemnulla skalárral szorozhatunk, és korábbi (már ortogonalizált) vektor többszörösét vonhatjuk ki későbbiből. Függőleges vonallal jelöljük, hogy meddig van ortogonalizálva a vektorrendszer, tehát melyik altérre ortogonalizáljuk a soron következő vektort. Egyszerre egy vektorra ortogonalizálunk a $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{c},\mathbf{v})}{\|\mathbf{c}\|^2}\mathbf{c}$ művelettel (ha később a $\mathbf{c}$-re merőleges vektorokra ortogonalizálunk, a vektor nem veszíti el azt a tulajdonságát, hogy $\mathbf{c}$-re merőleges legyen, mert csak $\mathbf{c}$-re merőleges vektorokat vonunk ki). Az előbbi ortogonalizáló műveletet összevonva egy skalárral való szorzással a $\|\mathbf{c}\|^2\mathbf{v} - (\mathbf{c},\mathbf{v})\mathbf{c}$ műveletet is végezhetjük, így a vektorok egész eleműek maradnak. Ha közben egy vektor $\mathbf{0}$-vá válna (ahogy történt a harmadik vektornál, azt akár menet közben ki is hagyhatjuk).

$$\left[\begin{array}{r|rrr} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rr|rr} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xmapsto{o_3 \mapsto o_3 + o_1}$$

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xmapsto{o_3 \mapsto o_3 - o_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rr|r} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xmapsto{o_3 \mapsto o_3 - 2o_1}$$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xmapsto{o_3 \mapsto o_3 - o_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

4. *Tekintsük az $(1,1,0,1),(1,1,0,0)$ által kifeszített W alteret a $V = \mathbb{Z}_2^4$ vektortérben.*
a) Mutassuk meg, hogy $W^\perp$ nem direkt kiegészítője W-nek.
b) Válasszunk ki a $\mathbb{Z}_2^4$ standard $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ bázisából két element, amelyek W-nek valamelyik direkt kiegészítőjét feszítik ki!

Megoldás: a) Látható, hogy $(1,1,0,0)$ merőleges önmagára, tehát $W \cap W^\perp \neq 0$, így $W^\perp$ nem lehet direkt kiegészítője W-nek.
A W merőlegesét egyébként az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásával számíthatjuk ki, ahol $\mathbf{A}$ sorai a W egy generátorrendszere (a megoldás vektoros alakjából a $W^\perp$ bázisát is leolvashatjuk). Ezután a $W + W^\perp$ dimenzióját ellenőrizhetjük egy másik Gauss-eliminációval, amit a két generátorrendszer uniójára alkalmazunk. Mivel $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$, pontosan akkor lesz $V = W \oplus W^\perp$, ha $\dim(W + W^\perp) = \dim V$.

b) Végezzünk Gauss-eliminációt arra a mátrixra, amelynek első néhány oszlopa a W megadott generátorrendszere, a többi az, amiből a kiegészítést választhatjuk (ez lehet általában a teljes tér egy tetszőleges generátorrendszere). A lépcsős alak vezérelemei által megjelölt oszlopok a W bázisával kezdődnek, és ezt egészítik ki a többiek a V egy bázisává. Ne felejtsük el, hogy modulo 2 számolunk ebben a feladatban!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A vezéroszlopok az 1., 2., 3. és 5., tehát a direkt kiegészítő altér bázisa $\{\,\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3\,\}$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy egy (V,f) valós eulideszi tér minden* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$ *vektorára teljesül az* $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) - f(\mathbf{u},\mathbf{u}) - f(\mathbf{v},\mathbf{v}))$ *polarizációs formula, így a norma meghatározza a skaláris szorzatot.*

Megoldás: $f(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{u}) + f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{v},\mathbf{u}) + f(\mathbf{v},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{u}) + 2f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{v},\mathbf{v})$, és ezt átrendezve és leosztva kapjuk a kívánt összefüggést.

6. *Legyen az* $(\mathbb{R}^2, f)$ *euklideszi térben* f *Gram-mátrixa a standard* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ *bázisban* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, *és legyen* $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (1,-1)$.

a) Mi lesz az $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ *és* $f(\mathbf{u},\mathbf{v})$*, skaláris szorzat, és mi az* $\mathbf{e}_1$ *és* $\mathbf{e}_2$ *normája?*

b) Adjunk meg $(\mathbb{R}^2, f)$*-ben ortonormált bázist!*

Megoldás: a) $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ a Gram-mátrix ij indexű eleme. Tehát $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) = 2$, $\mathbf{e}_1$ f-normája $\sqrt{f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)} = 1$, és $\mathbf{e}_2$ f-normája $\sqrt{5}$.
$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = (3,7)(1,-1)^T = -4$.

b) Használjunk Gram–Schmidt-ortogonalizációt az f skalárszorzatra nézve, az $\{\,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\,\}$ bázisra nézve.
$\mathbf{c}_1 = \mathbf{e}_1 = (1,0)$,
$\mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{f(\mathbf{e}_2,\mathbf{c}_1)}{f(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_1)}\mathbf{c}_1 = (0,1) - 2(1,0) = (-2,1)$. Tehát $\{\,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\,\} = \{(1,0),(-2,1)\,\}$ f-ortogonális bázis, és $f(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_1) = 1$, $f(\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$, így ez egyúttal f-ortonormált bázis is.

7. *Legyen* $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$.

a) Igazoljuk, hogy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *ortonormált bázis az* $(\mathbb{R}^4, (,))$ *standard euklideszi térben!*

b) Hogyan kapható meg egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *vektor e bázisra vonatkozó koordinátavektora?*

c) Legyen $W = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ *altér. Számítsuk ki az* $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$ *vektor* W*-re való merőleges vetületét!*

Megoldás: a) Ellenőrizhetjük külön-külön a normákat és a merőlegességet, vagy azt, hogy az áttérési mátrix ortogonális:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $\mathbf{x}$ koordinátavektora $((\mathbf{a}_1,\mathbf{x}),\ldots,(\mathbf{a}_n,\mathbf{x}))^T = A^T\mathbf{x}$, ha $\mathbf{x}$ oszlopvektorként van írva.

c) $\mathbf{x}$ vetülete $\mathbf{x}' = (\mathbf{a}_2,\mathbf{x})\mathbf{a}_2 + (\mathbf{a}_3,\mathbf{x})\mathbf{a}_3 + (\mathbf{a}_4,\mathbf{x})\mathbf{a}_4 = -\frac{1}{2}(1,-1,1,-1) - 2\cdot\frac{1}{2}(1,1,-1,-1) + 0\frac{1}{2}(1,-1,-1,1) = (-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2})$. (Ellenőrizhetjük azzal, hogy $\mathbf{x}-\mathbf{x}' = (\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ merőleges az altér minden generátorelemére.)

8. *Tekintsük a 6. feladatbeli euklideszi térben a* $\mathcal{B} := \{(1,2),(1,-1)\,\}$ *bázist. Mi lesz a báziscsere mátrixa? Legyen* $\mathbf{u}$ *koordinátavektora* $[\mathbf{u}]_{St}$ *és* $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$ *a standard, illetve a* $\mathcal{B}$ *bázisban. Hogyan kapható* $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$ *az* $[\mathbf{u}]_{St}$*-ből? Hogyan kapható* $[f]_{\mathcal{B}}$ *Gram-mátrixa* $[f]_{St}$*-ből?*

Megoldás: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[\mathbf{u}]_{St} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,
$[f]_{\mathcal{B}} = P^T[f]_{St}P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & -7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$.