1. *Mutassuk meg, hogy reguláris mátrixokon az invertálás és a transzponálás felcserélhetők.*

Megoldás: Azt kell belátni, hogy egy invertálható $\mathbf{A}$ mátrixra $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$, azaz $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I}$. Valóban, $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}$ és $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}$.

2. *Mutassuk meg, hogy az $n \times n$-es ortogonális mátrixok csoportot alkotnak, azaz ortogonális mátrixok szorzata ortogonális, inverze ortogonális és az egységmátrix ortogonális.*

Megoldás: Ha $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ és $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T$, akkor $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T$, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$, és $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{I}^T$.

3. *Melyik szemiortogonális az alábbi mátrixok közül? A szemiortogonálisoknak melyik oldali inverze létezik? Adjuk is meg a megfelelő egyoldali inverzeket!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: $\mathbf{B}$ nem szemiortogonális, mert bár a sorai és oszlopai is ortogonálisak, nem alkotnak ortonormált rendszert. $\mathbf{A}$ oszlopai viszont ortonormált rendszert alkotnak, ezért $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, vagyis $\mathbf{A}$ bal inverze $\mathbf{A}^T$.

4. *Legyen* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. *Határozzuk meg* $\mathbf{A}$ *QR-felbontását, valamint teljes QR-felbontását Gram–Schmidt -féle ortogonalizációval!*

Megoldás: Végezzük el az ortogonalizálást mátrixosan, oszlopműveletekkel! Mivel az első két oszlop ortogonális egymásra, csak a harmadik vektort kell erre a kettőre ortogonalizálni.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{array}\right] \overset{o_3 \mapsto o_3 - 4o_1}{\longmapsto} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{o_3 \mapsto o_3 - 3o_2}{\longmapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \;\Rightarrow\; \mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A teljes felbontáshoz $\mathbf{Q}$-t kell kiegészíteni ortogonális mátrixszá, például egy negyedik, független vektor ortogonalizálásával: $(1,0,0,0) - \frac{1}{4}(1,-1,1,-1) - \frac{1}{4}(1,1,1,1) - \frac{1}{4}(1,1,-1,-1) = \frac{1}{4}(1,-1,-1,1) \Rightarrow$ a negyedik vektor $\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$, és a felbontás

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. *a) Írjuk fel azt a 2×2-es forgatásmátrixot, amely az $(1,2)$ vektort elforgatja a $(\sqrt{5},0)$ vektorba!*

b) Írjuk fel a $\mathbf{v} = (1,-1,1,-1)$ normálvektorú hipersíkra való Householder-tükrözés standard mátrixát!

c) Írjuk fel annak a Householder-tükrözésnek a mátrixát, amely a $\mathbf{v} = (1,-1,1,-1)$ vektort olyan vektorba viszi, amelynek csak az első koordinátája nem nulla, és az első koordináta negatív! Milyen normálvektorú hipersíkra tükröz ez a transzformáció?

Megoldás: a) A forgatásmátrix $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) A tükrözés mátrixa $\mathbf{I} - \frac{2}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\|\mathbf{v}\| = 2$, így a hipersík normálvektora $(2,0,0,0) - (1,-1,1,-1) = (1,1,-1,1)$, és a tükrözés mátrixa $\mathbf{I} - \frac{2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. *Határozzuk meg az* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!*

Megoldás:

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 12 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

A kapott mátrix ugyan felső háromszög alakú, de nem elégíti ki azt a feltételt, hogy a diagonális elemei pozitívak legyenek. Ennek eléréséhez a végén még egy tükrözést is kell használni (mivel $\det \mathbf{A} < 0$, a forgatások pedig irányítástartók, tehát pozitív determinánsúak, nem is volt esély arra, hogy csupán forgatásokkal megkaphassuk az $\mathbf{R}$ mátrixot).

$$\mathbf{Q}_3\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{R}, \text{ és}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{65}\begin{bmatrix} 13 & -10 & 15 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{65}\begin{bmatrix} -52 & 15 & 36 \\ 39 & 20 & 48 \\ 0 & -60 & 25 \end{bmatrix}$$

7. *Határozzuk meg az* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ *mátrix QR-felbontását Householder-tükrözések segítségével!*

Megoldás: Az első tükrözés az $(1,-2,2)$ vektort viszi a $(3,0,0)$-ba, azaz a $(2,2,-2)$, vagy kényelmesebben az $(1,1,-1)$ normálvektorú síkra tükrözünk.

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

A második tükrözés az első koordinátát helybenhagyva az yz-sík $(4,3)$ vektorát viszi az $(5,0)$ vektorba. Ez az yz-síkon az $(1,-3)$ normálvektorú egyenesre való tükrözés, amelynek mátrixa $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & -4\end{bmatrix}$, tehát

$$\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 3 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Végül a z tengelyen kell egy tükrözést végrehajtanunk, míg az x, y koordinátasíkot helybenhagyjuk.

$$\mathbf{Q}_3\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

és

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{15}\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\ 0 & 3 & -21\\ 0 & 0 & 15\end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}5 & -2 & 14\\ -10 & 10 & 5\\ 10 & 11 & -2\end{bmatrix}$$

8. *Tekintsük a 4. feladatbeli* $\mathbf{A}$ *mátrixot. Határozzuk meg az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *lineáris egyenletrendszer egyetlen legjobban közelítő megoldását QR-felbontás segítségével, ha* $\mathbf{b} = (0,0,0,1)$*. Miért van csak egy legjobban közelítő megoldás?*

Megoldás: Az $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ egyenletet kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 8\\ 0 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}-1/2\\ 1/2\\ -1/2\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}1/4\\ 5/24\\ -1/8\end{bmatrix}$$