1. *Mekkora a $(1, i, 1+i)$ vektor hossza?*

Megoldás: $\|(1, i, 1+i)\| = \sqrt{|1|^2 + |i|^2 + |1+i|^2} = \sqrt{4} = 2.$

2. *Számítsuk ki az alábbi két vektor skaláris szorzatát és távolságát!* $\mathbf{a} = (1, i, 1+i)$, $\mathbf{b} = (1-i, i, 1+i)$.

Megoldás: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1(1-i) - i \cdot i + (1-i)(1+i) = 4 - i.$
$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|(i, 0, 0)\| = 1.$

3. *Végezzük el a Gram–Schmidt–eljárást a $\mathbb{C}^3$-beli $(0, 1, -1)$, $(1+i, 1, 1)$, $(1, i, 1)$ vektorokon!*

Megoldás: Ha $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1+i, 1, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, i, 1)$, akkor $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, ezért csak a harmadikat kell rájuk ortogonalizálni:

$$\mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = (1, i, 1) - \frac{-1+i}{2}(0, 1, -1) - \frac{2}{4}(1+i, 1, 1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right)$$

A három ortogonális vektort lenormálva az $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1), \frac{1}{2}(1+i, 1, 1), \frac{1}{2}(1-i, i, i) \right\}$ vektorrendszert kapjuk.

4. *Döntsük el az alábbi mátrixok mindegyikéről, hogy önadjungált, ferdén önadjungált, unitér, illetve normális-e?*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: **B** önadjungált, ezért normális is, de nem ferdén önadjungált, és nem unitér. **C** unitér, ezért normális is, de nem önadjungált, és nem is ferdén önadjungált. **A** nem unitér, nem önadjungált, és nem ferdén önadjungált. A normalitást ellenőrizhetjük az $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$ egyenlőséggel, vagy észrevehetjük, hogy **A** egy unitér, így normális mátrix skalárszorosa, ezért maga is normális.

5. *Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{R}]$ mátrix pontosan akkor szimmetrikus, ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y})$.*

Megoldás: Ha **A** szimmetrikus, akkor $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y})$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}$-ra.
Ha $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y})$, azaz $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}$-ra, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$-re és $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$-re is igaz minden i, j esetén. De tetszőleges **M** mátrixra $\mathbf{e}_i^T\mathbf{M}\mathbf{e}_j = m_{ij}$, a mátrix i. sorának j. eleme, ezért $\mathbf{A}^T$ minden eleme megegyezik az **A** megfelelő elemével, vagyis $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

6. *Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix önadjungált és unitér, tehát normális is. Keressünk egy olyan **B** mátrixot, amely hasonló **A**-hoz, de nem normális.(Tehát az normálisság nem hasonlóságra invariáns tulajdonság) Viszont mutassuk meg, hogy ha normális mátrixra egy unitér mátrixszal alkalmazunk hasonlóságot, akkor normális marad.*

Megoldás: Először belátjuk, hogy egy unitérrel való konjugálás normális mátrixot normálisba visz. Tegyük fel, hogy **A** normális, azaz $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$, és **U** unitér, azaz $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$. Ekkor a $\mathbf{B} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ mátrixra $\mathbf{B}^* = (\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U})^* = \mathbf{U}^*\mathbf{A}^*\mathbf{U}$, és $\mathbf{B}^*\mathbf{B} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}^*\mathbf{U}\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{U}^*\mathbf{A}^*\mathbf{U} = \mathbf{B}\mathbf{B}^*$.

Tehát ellenpéldának az **A**-nak csak olyan mátrixszal való konjugáltja jöhet szóba, amely nem unitér (és nem is skalárszorosa egy unitérnek), és nem diagonális, mert az felcserélhető lenne az **A** diagonális mátrixszal, tehát önmgába konjugálná. Próbáljuk meg a $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixot, amelynek inverze $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ezzel $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ami nem normális, mert $\mathbf{B}^*\mathbf{B}$-nek és $\mathbf{B}\mathbf{B}^*$-nak már a bal fölső eleme sem egyezik meg (az első oszlop skalárnégyzete nem egyezik meg az első sor skalárnégyzetével).

7. *Legyen egy f komplex skaláris szorzás Gram–mátrixa $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$ az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ standard bázisban. Számítsuk ki $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ hosszát és skaláris szorzatát a $(\mathbb{C}^2, f)$ euklideszi térben. Adjunk meg egy f-re ortonormált bázist $\mathbb{C}^2$-ben! Legyen $\mathbf{b}_1 = (1, i), \mathbf{b}_2 = (1, -1)$ új bázis. Adjuk meg f Gram–mátrixát ebben az új bázisban!*

Megoldás: A standard bázis elemeinek skalárszorzatát egyszerűen leolvashatjuk a Gram-mátrixból: $\mathbf{e}_i^*\mathbf{A}\mathbf{e}_j = a_{ij}$. Tehát $\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{2}$, és $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = i$. Az f-ortogonalizáláshoz a második bázisvektort kell ortogonalizálni az elsőre.

$$\mathbf{c}_2' := \mathbf{e}_2 - \frac{f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}{f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 = (0,1) - \frac{i}{2}(1,0) = \left(-\frac{i}{2}, 1\right) \Rightarrow \mathbf{c}_2 = (-i, 2).$$

Tehát $\{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{c}_2 \,\}$ f-ortogonális vektorrendszer, és $\mathbf{e}_1$ f-normája $\sqrt{2}$, míg

$$f(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2) = \begin{bmatrix} i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix} = 6,$$

ezért $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-i,2) \right\}$ f-ortonormált bázis.

Végül az új bázisra való áttérés $\mathbf{P}$ mátrixa és az új bázisbeli Gram-mátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \qquad [f]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}^*[f]_{St}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}.$$

8. *Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor pontosan akkor merőleges a konjugáltjára, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a valós euklideszi térben azonos hosszúságú, egymásra merőleges vektorok!*

Megoldás:

$$(\mathbf{x}-i\mathbf{y},\ \mathbf{x}+i\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x})+(\mathbf{x},i\mathbf{y})+(-i\mathbf{y},\mathbf{x})+(-i\mathbf{y},i\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x})+i(\mathbf{x},\mathbf{y})+i(\mathbf{y},\mathbf{x})+i\cdot i(\mathbf{y},\mathbf{y}) =$$

$$= \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| + i(\mathbf{x},\mathbf{y}) + i\overline{(\mathbf{x},\mathbf{y})} = \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| + 2i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| = 0 \text{ és } (\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| \text{ és } \mathbf{x} \perp \mathbf{y}.$$