1. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok összes sajátértékét és sajátvektorát, valamint sajátaltereit és azok dimenzióját! Van-e n darab lineárisan független sajátvektoruk, ahol n a mátrix mérete? Féligegyszerűek-e? Amelyik igen, arra adjunk meg hozzá hasonló diagonális mátrixot! Van-e ortonormált (valós vagy komplex) sajátvektorrendszerük?*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja $|\mathbf{A}-x\mathbf{I}| = x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$, sajátértékei 3 és -1, sajátalterei az $\mathbf{A}-3\mathbf{I}$ és $\mathbf{A}+\mathbf{I}$ nullterei:

$$\lambda = 3: \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1: \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mindegyik 1-dimenziós. Sajátvektorai ezekből a nemnulla vektorok.
Van sajátbázisa: $\{(-1,1),(1,1)\}$, tehát a mátrix féligegyszerű. A sajátbázis ortonormált is lehet: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\}$, az $\mathbf{A}$-hoz hasonló diagonális mátrix $diag(3,-1)$.

$\mathbf{B}$ felső háromszögmátrix, ezért a sajátértékei a diagonális elemei, tehát csak 1. $\mathbf{B}-\mathbf{I}$ rangja 1, ezért a sajátaltér dimenziója 2, bázisa könnyen leolvashatóan $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$. Így nem létezik $\mathbf{B}$-hez sajátbázis, se valós, se komplex, vagyis $\mathbf{B}$ nem féligegyszerű, azaz nincs hozzá hasonló diagonális mátrix.

$\mathbf{C}$ is felső háromszögmátrix, így könnyen leolvashatók a sajátértékei: $1, 2, -1$. Mivel ezek mind különbözők, és az 5. feladat szerint a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek, $\mathbf{C}$-hez létezik sajátbázis ($\mathbf{C}$ féligegyszerű), $\mathbf{C}$-hez hasonló diagonális mátrix a $diag(1,2,-1)$. A sajátalterek:

$$\lambda = 1\text{-hez:} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2\text{-höz:} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1\text{-hez:} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/6 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \tfrac{1}{6}t\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ortonormált sajátbázis nincs $\mathbf{C}$-hez, mert a három sajátaltér vektorai nem merőlegesek egymásra.

2. *a) Határozzuk meg az xy síkra való merőleges vetítés mátrixát, annak sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltereit!*

b) Határozzuk meg az $(1,1,1)$ normálvektorú, origón átmenő síkra való merőleges vetítés mátrixát, annak sajátértékeit, sajátvektorait és sajátaltereit!

Megoldás: a) Ez a vetítés az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektort önmagába, az $\mathbf{e}_3$ vektort $\mathbf{0}$-ba képezi, tehát a mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sajátaltere az xy-sík 1 sajátértékkel, és a sík normálvektora által generált egyenes, $\langle \mathbf{e}_3 \rangle$, a 0 sajátértékkel.

b) Az $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra való merőleges vetítés mátrixa $I - \frac{1}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^T$, ahol $\mathbf{n}$-et oszlopvektorként írjuk. Ebben az esetben ez

$$I - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sajátalterei az $x + y + z = 0$ sík a $\lambda = 1$ sajátértékhez (ez 2-dimenziós, és bázist ad benne a sík bármely két független vektora, például $\{(1, -1, 0),\ (1, 0, -1)\}$), és az $(1, 1, 1)$ által generált 1-dimenziós altér a $\lambda = 0$ sajátértékhez. (A mátrixát megkaphatjuk például úgy is, hogy az a) részbeli mátrixot konjugáljuk a sajátbázisból mint oszlopokból álló mátrix inverzével, vagy a 8. feladat megoldási módszerével.)

3. *Melyek igazak egy $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixra?*
a) Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek is.
b) Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak is.
c) Ha 0 sajátértéke $\mathbf{A}^2$-nek, akkor 0 sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is.
d) Ha $a^2 = b$ és b sajátértéke $\mathbf{A}^2$-nek, akkor a vagy $-a$ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is.

Megoldás: a) Igaz. Ha $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$, akkor $\mathbf{A}^2\mathbf{v} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{Av}) = \lambda^2\mathbf{v}$.

b) Nem igaz. Például az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ négyzete az egységmátrix, amelynek minden nemnulla vektor sajátvektora, de $\mathbf{A}$-nak nem. Például $\mathbf{A}$-nak nem sajátvektora az $(1, 0)$, de $\mathbf{A}^2$-nek igen.

c) Igaz. Ha $\mathbf{A}^2$-nek sajátértéke a 0, akkor $|\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A}^2| = 0$, ezért $|\mathbf{A}| = 0$, amiből következik, hogy $\mathbf{A}$-nak is sajátértéke a 0.

d) Igaz. $0 = |\mathbf{A}^2 - a^2\mathbf{I}| = |(\mathbf{A} + a\mathbf{I})(\mathbf{A} - a\mathbf{I})| = |\mathbf{A} + a\mathbf{I}| \cdot |\mathbf{A} - a\mathbf{I}| \Rightarrow |\mathbf{A} + a\mathbf{I}| = 0$ vagy $|\mathbf{A} - a\mathbf{I}| = 0$. (Itt használtuk, hogy $\mathbf{I}$ felcserélhető bármely mátrixszal, de általában $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 \neq (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B})$.)

4. *Határozzuk meg, az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! Mutassuk meg, hogy az alábbi mátrixok féligegyszerűek! Adjunk meg mindkét esetben sajátvektorokból álló bázist! Írjuk fel e lineáris transzformációk mátrixát a sajátvektorokból álló bázisban! Diagonalizálás segítségével számítsuk ki e mátrixok 100-adik hatványát!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $|\mathbf{A} - x\mathbf{I}| = x^2 - 2x \Rightarrow$ a sajátértékek 0 és 2. Két különböző sajátérték van, tehát $\mathbf{A}$ féligegyszerű. A sajátvektorok:

$$0:\ \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix},\ 2:\ \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$t \neq 0$-ra. Egy sajátbázis $\mathcal{B} = \{(-i, 1), (i, 1)\}$. Az ezekből a vektorokból mint oszlopokból álló $\mathbf{P}$ áttérési mátrixszal $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} = diag(0, 2) \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Így

$$\mathbf{A}^{100} = \mathbf{PD}^{100}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{99} & 2^{99}i \\ -2^{99}i & 2^{99} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$ sajátértékei 1 és 2, sajátvektorai

$$1:\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad 2:\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$t \neq 0$-ra. Egy sajátbázis $\mathcal{B} = \{(1,0),(-1,1)\}$. Az ezekből a vektorokból mint oszlopokból álló $\mathbf{P}$ áttérési mátrixszal $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} = diag(1,2) \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Így

$$\mathbf{A}^{100} = \mathbf{PD}^{100}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-2^{100} \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}$$

5. *Mutassuk meg, hogy különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek! Speciálisan, ha egy komplex elemű mátrix összes sajátértéke különböző, akkor a mátrix $\mathbb{C}$ felett diagonalizálható, azaz féligegyszerű.*

Megoldás: Legyenek $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sajátvektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ csupa különböző sajátértékkel. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineárisan független. Ha $k = 1$, akkor $\{\mathbf{v}_1\}$ független, mert egy sajátvektor nem lehet $\mathbf{0}$. Tegyük fel, hogy k-nál kevesebb vektorra igaz az állítás, és hogy $\mathbf{u} := \sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ valamely $c_1, \ldots, c_k$ skalárokkal. Ekkor $\mathbf{0} = \lambda_k\mathbf{u} - A\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} c_i(\lambda_k - \lambda_i)\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i(\lambda_k - \lambda_i)\mathbf{v}_i$, mert az utolsó együttható 0. De az indukciós feltevés miat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ függetlenek és $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$, ezért $c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0$, így $\mathbf{0} = c_k\mathbf{v}_k$, amiből $c_k = 0$, mivel $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$.

6. *Legyen* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *Határozzuk meg az* $\mathbf{A}^2$ *és az* $\mathbf{A}$ *mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, azok algebrai és geometriai multiplicitását és e mátrixok karakterisztikus polinomját!*

Megoldás: $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix, és az oszlopai egymásra merőleges, 2 hosszúságú vektorok, ezért $\mathbf{A}^2 = 4\mathbf{I}$. Ez utóbbinak 4 az egyetlen sajátértéke, és minden nemnulla vektor sajátvektora. Tehát 4 geometriai és algebrai multiplicitása egyaránt 4. $\mathbf{A}^2$ karakterisztikus polinomja eszerint $(x-4)^4$. Másrészt a 3.a) feladat megoldása szerint $\mathbf{A}$ sajátvektorai csak ± 2 lehetnek. $\mathbf{A}-2\mathbf{I}$ láthatóan egy rangú mátrix (az összes többi sor az első sor -1-szerese), ezért a 2 az $\mathbf{A}$ 3-szoros geometriai és legalább 3-szoros algebrai multiplicitású sajátértéke. A hozzá tartozó sajátvektorok az $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$ sík nemnulla vektorai. A -2 is sajátérték, a mátrixból is könnyen leolvasható, hogy $(-1,1,1,1)$ egy -2-höz tartozó sajátvektor, s mivel -2 algebrai multiplicitása már csak 1 lehet, ez a geometriai multiplicitása is, vagyis az összes, 2-höz tartozó sajátvektor a $(-1,1,1,1)$ vektor skalárszorosa. (Egyébként az, hogy -2 is sajátérték, abból is leolvasható, hogy $\mathbf{A}$ nyoma 4, és így az utolsó sajátérték $4 - 3 \cdot 2 = -2$.

7. *Tegyük fel, hogy egy* $\mathbf{A}$ *mátrix karakterisztikus polinomja* $(x-1)x^3$ *és a* 0 *sajátérték geometriai multiplicitása* 1. *Mit mondhatunk ekkor* $\mathbf{A}$ *rangjáról? Adjunk meg ilyen mátrixot!*

Megoldás: A karakterisztikus polinom fokából leolvasható, hogy $\mathbf{A}$ 4×4-es. Az, hogy a 0 geometriai multiplicitása 1, azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ nulltere 1-dimenziós, és így $\mathbf{A}$ rangja $4 - 1 = 3$. Ilyen mátrixot kaphatunk olyan háromszögmátrixként, amelynek diagonális elemei $1, 0, 0, 0$, és a rangja 3, például:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. *Határozzuk meg azt az* $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *lineáris transzformációt, amelynek sajátpárjai:* $((1,0,1),3),((1,1,1),0),(1,-1,0),1)$*!*

Megoldás: Ha a keresett $\mathbf{A}$ mátrix oszlopai $\mathbf{o}_1$, $\mathbf{o}_2$ és $\mathbf{o}_3$, akkor az $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ egyenletek az oszlopokra azt jelentik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_1 + \mathbf{o}_3 =& (3,0,3)^T \\ \mathbf{o}_1 + \mathbf{o}_2 + \mathbf{o}_3 =& \mathbf{0} \\ \mathbf{o}_1 - \mathbf{o}_2 =& (1,-1,0)^T. \end{aligned}$$

Az első kettő különbségéből $\mathbf{o}_2 = (-3,0,-3)^T$ következik, ebből és a harmadikból $\mathbf{o}_1 = (-2,-1,-3)^T$, és ezután az elsőből $\mathbf{o}_3 = (5,1,6)^T$. Tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixot kiszámíthattuk volna az $\mathbf{A} = \mathbf{P}diag(3,0,1)\mathbf{P}^{-1}$ képletből is, ahol $\mathbf{P}$ a sajátbázishoz tartozó áttérési mátrix, amelynek oszlopai a sajátvektorok, vagy az $\mathbf{A}[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3] = [3\mathbf{v}_1|\mathbf{0}|\mathbf{v}_3]$ mátrixegyenlet megoldásával, akár úgy, hogy a $[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3]$ mátrix inverzével szorzunk jobbról, akár úgy, hogy az egyenlet transzponáltját oldjuk meg szimultán egyenletrendszerként az $\mathbf{X} = \mathbf{A}^T$ ismeretlen mátrixra.