1. *Mutassuk meg, hogy $M_n[\mathbb{C}]$ mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér az önadjugált mátrixok és a ferdén önadjungált mátrixok altereinek direkt összege, de ezek a komponensek $\mathbb{C}$ fölött nem alkotnak alteret!*

Megoldás: Jelöljük V-vel az önadjungált, W-vel a ferdén önadjungált mátrixok halmazát $M_n[\mathbb{C}]$-ben. Ha $A, B \in V$, és $c \in \mathbb{R}$, akkor $(A+B)^* = A^* + B^* = A + B$ és $(cA)^* = \bar{c}A^* = cA$, tehát $A + B,\ cA \in V$. Ha pedig $A, B \in W$, akkor $(A+B)^* = A^* + B^* = (-A) + (-B) = -(A+B)$, és $(cA)^* = \bar{c}A^* = c(-A) = -(cA)$, tehát $A + B,\ cA \in W$. Tehát V és W is altér $M_n[\mathbb{C}]_{\mathbb{R}}$-ben. Ha $A \in V \cap W$, akkor $A = A^* = -A \Rightarrow A = 0$, tehát $V \cap W = 0$, továbbá tetszőleges $A \in M_n[\mathbb{C}]$-re $A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*) \in V + W$, ezért $M_n[\mathbb{C}]_{\mathbb{R}} = V \oplus W$.

Viszont sem V, sem W nem altér $\mathbb{C}$ fölött: ha A öndajungált, akkor iA ferdén önadjungált: $(iA)^* = -iA^* = -iA$, és fordítva.

2. *Legyen V_F egy vektortér, $A : V \to V$ lineáris transzformáció.*

a) Mutassuk meg, hogy V pontosan akkor áll elő 1-dimenziós A-invariáns alterek direkt összegeként, ha van V-ben A sajátvektoraiból álló bázis.

b) Mutassuk meg, hogy V pontosan akkor áll elő $k \geq 2$ darab A-invariáns altér direkt összegeként, ha van V-ben olyan B bázis, amelyben A mátrixa k diagonális blokkot tartalmazó blokkdiagonális mátrix.

Megoldás: a) Egy egydimenziós A-invariáns altér minden $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ eleme sajátvektora A-nak, ugyanis az altér minden eleme, így $A\mathbf{v}$ is benne van $\langle \mathbf{v} \rangle$-ban. Tehát ha mindegyik komponensből kiveszünk egy egyelemű bázist, ezek uniója sajátbázis lesz V-ben A-ra nézve. Fordítva, ha van egy sajátbázis, akkor az elemei által külön-külön generált altereknek a V direkt összege, és ezek az egydimenziós alterek A-invariánsak, mert minden nemnulla elemük sajátvektor.

b) Ha V-nek van egy k darab A-invariáns altérre való direkt felbontása, akkor a felbontáshoz tartozó $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$ bázisra $\mathcal{B}_i$ elemeinek képe $\langle \mathcal{B}_i \rangle$-ben van, azaz $\mathcal{B}_i$-beliek lineáris kombinációja, és így az ebben a bázisban felírt mátrix megfelelő oszlopában a $\mathcal{B}_i$-hez tartozó sorokon kívül csupa 0 van. Vagyis a mátrix blokkdiagonális, ahol az i. blokk mérete $|\mathcal{B}_i|$.

Fordítva, ha a mátrix blokkdiagonális, akkor leolvasható belőle, hogy az egyes diagonális blokkokhoz tartozó oszlopoknak megfelelő báziselemek képe csak ezeknek a báziselemeknek lesz lineáris kombinációja, azaz a bázisnak ezek a részhalmazai A-invariáns altereket generálnak, és ezeknek az altereknek nyilvánvalóan direkt összege lesz a V vektortér.

3. *Van-e olyan komplex elemű mátrix, amelynek karakterisztikus és minimálpolinomja a következő?*

a) $(x-1)^2(x-2)^2$, $(x-1)(x-2)^2$

b) $x^6 + x + 1$, $x^2 + x + 1$

c) $-(x-1)^2(x-2)^2(x-5)$, $(x-1)^2(x-2)^2$

d) $(x^3 - x - 4)^2$, $x^3 - x - 4$

Ha van, mutassunk rá példát!

Megoldás: A minimálpolinom osztója kell, hogy legyen a karakterisztikus polinomnak, és a karakterisztikus polinom minden gyöke ($\mathbb{C}$ fölött is) gyöke kell, hogy legyen a minimálpolinomnak. Így a b) és c) eset nem lehetséges. A b) esetben azt, hogy a második polinom nem osztója az elsőnek, maradékos osztás helyett azzal is beláthatjuk, hogy a másodiknak gyökei a primitív 3. egységgyökök, de az elsőbe egy ilyen ε-t behelyettesítve $2 + \varepsilon$-t kapunk, ami nyilván nem 0.

Az a)-ra keressünk példát a blokkdiagonális mátrixok körében. Könnyen látható, hogy a blokkdiagonális mátrixok karakterisztikus polinomja a blokkok karakterisztikus polinomjának szorzata ($A - xI$ is blokkidagonális), minimálpolinomja pedig a blokkok minimálpolinomjának legkisebb közös többszöröse. Tehát elég olyan $diag(B, C)$ mátrixot találni, amelyre $k_B(x) = (x-1)^2$, $m_B(x) = x-1$, $k_C(x) = (x-2)^2$ és $m_C(x) = (x-2)^2$ a blokkok karakterisztikus és minimálpolinomja. Az első esetben $m_B(B) = 0$ azt adja, hogy $B = I_2$. C-nek bármely olyan $(x-2)^2$ karakterisztikus polinomú mátrix megfelel, amely nem egyenlő $2I$-vel, például $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tehát a)-ra példa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

d)-nél is használhatjuk az előbbi módszert: elég egy olyan 3×3-as mátrixot keresni, amelynek karakterisztikus és minimálpolinomja $\pm(x^3 - x - 4)$, és ebből a blokkból teszünk kettőt egy 6×6-os blokkdiagonális mátrixba. Adott $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ polinomhoz $f(x)$ minimálpolinomú $n \times n$-es mátrixot kapunk (és így persze a karakterisztikus polinomja, ami ennek többszöröse és n-edfokú, is csak $(-1)^n f(x)$ lehet), ha egy olyan lineáris transzformáció mátrixát írjuk fel, amelynek a hatása a báziselemeken: $A : \mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_2 \mapsto \cdots \mapsto \mathbf{b}_{n-1} \mapsto \mathbf{b}_n \mapsto -a_0\mathbf{b}_1 - a_1\mathbf{b}_2 \ldots - a_{n-1}\mathbf{b}_n$ (ez az $f(x)$ kísérőmátrixa). Ekkor ugyanis $\mathbf{b}_i = A^{i-1}\mathbf{b}_1$ minden i-re, és $A^n\mathbf{b}_1 = A\mathbf{b}_n = -(a_0 I + a_1 A + \ldots + a_{n-1}A^{n-1})\mathbf{b}_1$, vagyis $f(A)\mathbf{b}_1 = 0$, és ebből $f(A)\mathbf{b}_i = f(A)A^{i-1}\mathbf{b}_1 = A^{i-1}f(A)\mathbf{b}_1 = 0$ következik, ezért $f(x)$ annulláló polinom. Viszont kisebb fokú annulláló polinom nem létezhet, mert $I\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_1, \ldots, A^{n-1}\mathbf{b}_1$ lineárisan függetlenek. Tehát a d) esetre példa

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. *a) Mutassuk meg, hogy hasonló mátrixok minimálpolinomjai megegyeznek!*
b) Mutassuk meg, hogy bármely invertálható $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{C}]$ mátrixhoz létezik olyan legfeljebb $n-1$-edfokú $p(x)$ polinom, hogy $\mathbf{A}^{-1} = p(\mathbf{A})$!

Megoldás: a) Ha $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, és $f(\mathbf{A}) = 0$, akkor minden k-ra
$\mathbf{B}^k = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})\cdots(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}$, és így
$f(\mathbf{B}) = \mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})P = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{0}\mathbf{P} = \mathbf{0}$,
tehát $\mathbf{A}$ minden annulláló polinomja annullálja $\mathbf{B}$-t, és ugyanez igaz fordítva is, így a minimális fokú annulláló polinomjuk is megegyezik.

b) Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor a nulla nem sajátértéke, így a karakterisztikus polinomjának a konstans tagja nem 0. A Cayley–Hamilton-tétel szerint

$$0 = k_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = c_n\mathbf{A}^n + \ldots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I},$$

és ezt $c_0^{-1}A^{-1}$-zel beszorozva és átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{c_n}{c_0}\mathbf{A}^{n-1} - \ldots - \frac{c_1}{c_0}\mathbf{I}.$$

5. *Igazoljuk, hogy, ha egy $\mathbf{A}$ mátrix minden sor- vagy oszlopösszege c, akkor c sajátértéke $\mathbf{A}$-nak!*

Megoldás: Ha a sorösszegek mindegyike c, akkor a csupa 1-ből álló $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{A}\mathbf{v} = c\mathbf{v}$, tehát $\mathbf{v}$ sajátvektor c sajátértékkel.

Ha az $\mathbf{A}$ oszlopösszegei egyenlők c-vel, akkor $\mathbf{A}^T$ minden sorösszege c, tehát az előző eset szerint $\mathbf{A}^T$-nak sajátértéke a c. Viszont $\mathbf{A}^T$ karakterisztikus polinomja megegyezik $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomjával ($|\mathbf{A}^T - x\mathbf{I}| = |(\mathbf{A} - x\mathbf{I})^T| = |\mathbf{A} - x\mathbf{I}|$), tehát ha az egyiknek sajátértéke a c, akkor a másiknak is.

6. *a) Mutassuk meg, hogy a következő mátrixok ortogonálisan hasonlók.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg a hasonlóság ortogonális mátrixát!
c) Határozzuk meg a mátrixok karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!
d) Adjuk meg a sajátértékeket, sajátvektorokat, sajátaltereket mindkét mátrixra!

Megoldás: Legyen $\mathbf{A}$ az első mátrix, $\mathbf{D}$ a második.

a) $\mathbf{A}$-nak sajátértéke a 4 az előző feladat szerint, továbbá $\mathbf{A}$ rangja 1, így a 0 sajátérték, 3-dimenziós sajátaltérrel. Ebből következik, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható: a 4-hez tartozó sajátvektort a 0-hoz tartozó sajátaltér bázisával kiegészítve sajátbázist kapunk, és az ehhez tartozó diagonális alak éppen a $\mathbf{D}$ mátrix. A 4-hez tartozó sajátaltérre merőleges a 0-hoz tartozó sajátaltérre (ld. a b) részt), így ortogonális, sőt ortonormált sajátbázis is létezik.

b) A 0-hoz tartozó sajátaltér az $(1,1,1,1)^\perp =: W$, tehát merőleges a 4-hez tartozó sajátvektorra. Csak W-hez kell ortogonális bázist találni. Ezt megoldhatjuk a Gauss-eliminációból kapott $\{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$ bázis ortogonalizálásával, vagy kereshetünk szép bázist: az $(1,1,1,1)$-re merőleges $(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1)$ vektorok közül (tehát amelyekben két plusz és két minusz van) könnyen kiválogathatunk egymásra merőlegeseket: $\{(1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1), (1,-1,-1,1)\}$. Az $\mathbb{R}^4$ így kapott bázisát lenormálva a következő ortogonális áttérési mátrixot kapjuk:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Hasonló mátrixok karakterisztikus és minimálpolinomja megegyezik, ezért elég a $\mathbf{D}$-re felírni ezeket, és $\mathbf{D}$-ből egyszerűen leolvasható, hogy a karakterisztikus polinom $(x-4)x^3$, a minimálpolinom pedig $(x-4)x$ (Általában is igaz, hogy egy diagonális mátrix minimálpolinomja a különböző sajátértékekhez tartozó gyöktényezők szorzata, ugyanis ennek nyilván többszöröse a minimálpolinom, és ha ebbe tényezőnként behelyettesítjük a mátrixot, akkor az átló minden pozíciójában nulla lesz valamelyik szorzó tényező).

d) Az $\mathbf{A}$ mátrix 4-hez tartozó sajátalterét az $(1,1,1,1)$ vektor generálja, a 0-hoz tartozó sajátaltér pedig ennek a merőleges kiegészítője, amelynek bázisa például a b) részben megadott $\{(1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1), (1,-1,-1,1)\}$. A $\mathbf{D}$ sajátalterei még könnyebben leolvashatók: a 4-hez a $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$, a 0-hoz az $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$ sajátaltér tartozik. A sajátvektorok a sajátalterek nem nulla vektorai.

7. *Legyen az $\mathbf{A} \in M_n[\mathbb{R}]$, melynek nem nulla elemei $a_{i,i+1} = 1$ ($i = 1, \ldots, n-1$), és $a_{n,1} = 1$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ unitéren diagonizálható $\mathbb{C}$ fölött! Adjuk meg $\mathbf{A}$ karakterisztikus- és minimálpolinomját!*

Megoldás: Az $|\mathbf{A} - x\mathbf{I}|$ determinánst megkaphatjuk két kígyó összegeként: $(-x)^n + (-1)^{n-1}1^n = (-1)^n(x^n - 1)$. Ennek a gyökei az n-edik komplex egységgyökök. Mivel van n különböző sajátértéke, a mátrix diagonalizálható, és sajátértékei $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$. Egy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ vektorra $\mathbf{Ax} = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$. Ebből (is) látható, hogy az 1 sajátértékhez sajátvektor a csupa 1-ből álló vektor, és ha ε^k-hoz keresünk sajátvektort, az csak olyan lehet, amelyre $x_j = \varepsilon^k x_{j-1}$ minden j-re, például az $(1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \ldots, \varepsilon^{(n-1)k})^T$. Az így kapott sajátvektorok merőlegesek egymásra: az ε^k-hoz és ε^ℓ-hez tartozó sajátvektorok skalárszorzata $\sum_{t=0}^{n-1} \varepsilon^{t(\ell-k)}$ az összes m-edik egységgyök összege $\frac{n}{m}$-szer, ahol $m = \frac{n}{(n,\ell-k)}$, tehát a skalárszorzat $0 < |\ell - k| < n$ miatt 0. Ha ezeket a vektorokat leosztjuk $\sqrt{n}$-nel, ortonormált sajátbázist kapunk. Tehát $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható, és a diagonalizáló mátrix az $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}$-hez tartozó Vandermonde-mátrix $\frac{1}{\sqrt{n}}$-szerese. (Egyébként később látni fogjuk, hogy minden unitér mátrix unitéren diagonalizálható, és a permutációs mátrixok, mint ez is, nyilvánvalóan unitérek.) Mivel a karakterisztikus polinomnak minden gyöke különböző, a minimálpolinom is a karakterisztikus polinom skalárszorosa, $x^n - 1$.

8. *Keressünk olyan ortonormált bázist $\mathbb{R}^3$-ban, melyre nézve az origón átmenő $(1, 1, 4)$ irányvektorú egyenesre való φ tükrözés mátrixa diagonális mátrix. Írjuk fel a transzfomáció standard mátrixát, karakterisztikus- és minimálpolinomját!*

Megoldás: A tükrözésnek sajátvektorai az egyenes irányvektorai 1 sajátértékkel, és az erre merőleges, origón átmenő sík nemnulla vektorai -1 sajátértékkel. Egy ortogonális sajátbázis megtalálásához elég az egyenes irányvektorához a síknak egy vektorát kiválasztani, és harmadiknak az első két vektor vektoriális szorzatát venni (az is a síkban lesz): $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 4)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -1, 0)$, és $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 4) \times (1, -1, 0) = (4, 4, -2)$. Ezeket lenormálva megkapunk egy ortonormált sajátbázist:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, 1, 4),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0),\ \frac{1}{3}(2, 2, -1) \right\}.$$

Ebből a $\mathcal{B}$-ben felírt mátrix $\mathbf{B} = diag(1, -1, -1)$, és a standard mátrix $\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^{-1} = \mathbf{PBP}^T =$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 1 & -3 & 2\sqrt{2} \\ 4 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Az egyenesre való tükrözést végrehajthatjuk úgy is, hogy a síkra vett merőleges vetület kétszeresét kivonjuk a vektorból, tehát a standard mátrixát felírhatjuk közvetlenül az egyenes $\mathbf{v}$ irányvektorából mint $\mathbf{I} - 2\left(\mathbf{I} - \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}\mathbf{v}^T\right) = \frac{2}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}\mathbf{v}^T - \mathbf{I}$.

A karakterisztikus polinomot és a minimálpolinomot egyszerűen leolvashatjuk a diagonális alakból: $k(x) = -(x-1)(x+1)^2$, és $m(x) = (x-1)(x+1)$.