1. *A mátrix méretére vonatkozó teljes indukcióval mutassuk meg, hogy egy felső háromszögmátrix pontosan akkor normális, ha diagonális.*

Megoldás: Az 1×1-es mátrixok diagonálisak is, és normálisak is, tehát azokra igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixokra igaz, és legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normális felső háromszögmátrix. Írjuk fel $\mathbf{A}$-t blokkháromszögmátrixként: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{C}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{n-1}$, és $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ felső háromszögmátrix. Mivel $\mathbf{A}$ normális,

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{b} & \mathbf{C}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 & \bar{a}\mathbf{b}^* \\ a\mathbf{b} & \mathbf{b}\mathbf{b}^* + \mathbf{C}^*\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} a & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{b} & \mathbf{C}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 + \mathbf{b}^*\mathbf{b} & \mathbf{b}^*\mathbf{C}^* \\ \mathbf{C}\mathbf{b} & \mathbf{C}\mathbf{C}^* \end{bmatrix}$$

egyenlők, így $\|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{b}^*\mathbf{b} = 0$, amiből $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ következik, és így a $\mathbf{b}\mathbf{b}^* + \mathbf{C}^*\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^*$ egyenlőségből $\mathbf{C}^*\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^*$ lesz, vagyis $\mathbf{C}$ normális. Az indukciós feltevés miatt $\mathbf{C}$ diagonális, az pedig korábban kijött, hogy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{A}$ is diagonális.

2. *Határozzuk meg az alábbi mátrix saját- és spektrálfelbontását és ennek segítségével a 12-edik hatványát!* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Megoldás: Nevezzük $\mathbf{A}$-nak a megadott mátrixot. Mivel háromszögmátrix, rögtön leolvasható, hogy a sajátértékei 0 és 2, és az $\mathbf{A}$ nullterét az $(1,0,0)$, az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ nullterét az $(1,2,0)$ és $(1,0,2)$ generálják. Tehát az ezekből összerakott $\mathbf{P}$ áttérési mátrixszal az $\mathbf{A}$ mátrix a $\mathbf{D} = diag(0,2,2)$ alakba konjugálható, és így

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{12} = 2^{12} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{11} & 2^{11} \\ 0 & 2^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{12} \end{bmatrix}$$

A spektrálfelbontást a sajátvektorok megkeresése nélkül is kiszámíthatjuk: a különböző $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sajátértékekre a

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P}_1 & + & \dots & + & \mathbf{P}_k & = & \mathbf{I} \\ \lambda_1\mathbf{P}_1 & + & \dots & + & \lambda_k\mathbf{P}_k & = & \mathbf{A} \\ \dots & & & & & & \\ \lambda_1^{k-1}\mathbf{P}_1 & + & \dots & + & \lambda_k^{k-1}\mathbf{P}_k & = & \mathbf{A}^{k-1} \end{array}$$

egyenletrendszert kell megoldani ismeretlen $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$ mátrixokra. Esetünkben:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \mathbf{I} \\ 0 & 2 & \mathbf{A} \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \mathbf{I} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\mathbf{A} \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\mathbf{A} \end{array}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. *Határozzuk meg az alábbi mátrix Schur-felbontását!* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

Megoldás: Legyen $\mathbf{A}$ a feladatban megadott mátrix. $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja $(x-1)(x^2-4x+4) = (x-1)(x-2)^2$. A $\lambda = 1$ sajátértékhez sajátvektor az $\mathbf{e}_3$, és ezt könnyen kiegészíthetjük ortonormált bázissá: $\{\,\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\,\}$, tehát először a $\mathbf{Q}_1 = [\mathbf{e}_3\, \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2]$ mátrixot használjuk:

$$\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

A jobb alsó sarokban levő 2×2-es mátrixnak sajátértéke a 2, amelyhez tartozó sajátvektor $(1,1)$, így ennek a háromszög alakra hozásához az $\{\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\,\}$ bázist használjuk, miközben az első koordinátán triviálisan hatunk.

$$\mathbf{Q}_2^T\mathbf{Q}_1^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{11}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. *Mutassuk meg, hogy a Schur-felbontásnál pontosan akkor kapunk diagonális mátrixot, ha a kiindulási mátrix normális!*

Megoldás: A Schur-felbontásnál kapott mátrix $U^{-1}AU$ mátrix felső háromszögmátrix, és pontosan akkor normális, ha A normális, ugyanis az unitérrel való konjugálás normális mátrixot normálisba visz (ld. 4/6. feladat). Így az 1. feladat alapján $U^{-1}AU$ diagonális $\Leftrightarrow U^{-1}AU$ normális $\Leftrightarrow A$ normális.

5. *Legyen* $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in M_n[\mathbb{C}]$, *és jelölje* $\mathbf{A}$ *sajátértékeit* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Igazoljuk, hogy* $\mathbf{A}$ *pontosan akkor normális mátrix, ha* $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$. *(Használjuk a Schur-felbontást!)*

Megoldás: Vegyük észre, hogy a $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2$ az A mátrix oszlopai hossznégyzetének összege (és egyúttal a sorai hossznégyzetének összege is). Ha a mátrixot jobbról vagy balról megszorozzuk egy unitér mátrixszal, akkor ennek a kifejezésnek az értéke nem változik: UA oszlopai az A oszlopainak U-szorosai, így a hosszuk változatlan marad, míg AU-ra a fenti összeg nyilván ugyanaz, mint $(AU)^T = U^TA^T$-ra, és az az előbbiek alapján megegyezik az A^T, és így az A elemei abszolút értékének négyzetösszegével. Tehát A helyett tekinthetjük a Schur-felbontás során kapott $U^{-1}AU$ mátrixot, amelynek átlójában a λ_i sajátértékek állnak, tehát az elemek abszolút értékének négyzetösszege $\sum_i |\lambda_i|^2$ plusz az átló fölötti elemek abszolút értékének négyzetei, s mivel ez utóbbiak is mind nemnegatív valós számok, ez akkor lesz egyenlő $\sum_i |\lambda_i|^2$-vel, ha $U^{-1}AU$ diagonális, azaz, ha A normális (a 4. feladat szerint).

6. *Legyen* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Mennyi az **A** *rangja? Mit mondhatunk a* 0*-tól különböző sajátértékek számáról és típusáról?*

b) Az előző feladat állítását és a mátrix nyomát felhasználva számítsuk ki a sajátértékeket!

Megoldás: a) A rangja kettő, mivel csak kétféle sora van, és azok nem skalárszorosai egymásnak. Ebből következik, hogy a 0-hoz tartozó sajátaltér dimenziója $5 - 2 = 3$. Ráadásul **A** szimmetrikus valós mátrix, tehát diagonalizálható, és minden sajátértéke valós. A diagonális alakban az előbbiek szerint pontosan 3 darab 0 lehet, így ezen kívül csak (multiplicitással) két nemnulla sajátértéke lehet.

b) A nyom, ami itt 1, a sajátértékek összege, másrészt az előző feladat szerint (mivel **A** valós szimmetrikus, így normális is) a sajátértékek négyzetösszege 25. Tehát ha a és b a két nemnulla sajátérték, akkor $a+b = 1$, és $a^2+b^2 = 25$. Ebből $ab = \frac{1}{2}(1^2-25) = -12$, tehát a és b az $x^2 - x - 12 = 0$ egyenlet két gyöke, 4 és -3. Összesítve, a sajátértékek multiplicitással: $0, 0, 0, 4, -3$.

7. *Hozzuk kanonikus alakra az* $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ *egyenletű másodrendű görbe egyenletét és ábrázoljuk a görbét és az új koordinátarendszer tengelyeit az eredeti koordinátarendszerben!*

Megoldás: Olyan derékszögű koordinátarendszert kell választanunk, amelyben a polinom kvadratikus része a koordináták négyzeteinek lineáris kombinációja. Tehát ortogonális mátrixszal kell a kvadratikus alak $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrixát diagonális alakra hozni. Mivel $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$, a $\mathbf{Q}$-val való konjugálás a kvadratikus alakot is négyzetösszeg alakra hozza:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow [\,x \quad y\,]\,\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\,x' \quad y'\,]\,\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [\,x' \quad y'\,]\,\mathbf{D}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

A sajátértékei 9 és 1, a hozzátartozó ortonormált sajátbázis $\{\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\,\}$, és $\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, amiből $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9(x')^2 + (y')^2$, és az

$$[\,x \quad y\,]\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{bmatrix}$$

koordinátacserével a görbe egyenlete $0 = 5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9 = 9(x')^2+(y')^2 - 9\sqrt{2}(x'-y') - 9\sqrt{2}(x'+y') + 9 = 9((x')^2 - 2\sqrt{2}x') + (y')^2 + 9 = 9(x' - \sqrt{2})^2 + (y')^2 - 9$ teljes négyzetekké való kiegészítéssel, amiből egy $x'' = x' - \sqrt{2}$ és $y'' = y'$ eltolással az

$$(x'')^2 + \left(\frac{y''}{3}\right)^2 = 1$$

kanonikus alakhoz jutunk. Ez egy ellipszis egyenlete, amelynek (az új koordinátarendszerben) a középpontja az origó, a vízszintes féltengelye 1, a függőleges 3 hosszú. A régiben ezek a tengelyek az $(1,1)$, illetve $(-1,1)$ bázisvektorokkal párhuzamosak, de a méretük ugyanakkora, mivel ortogonális transzformációt alkalmaztunk, és a középpont egyenlete az $x'' = 0$, $y'' = 0$ értékekből visszaszámolva $(x,y)^T = \mathbf{Q}(x',y')^T = \mathbf{Q}(\sqrt{2},0)^T = (0,1)^T$.