1. *Hozzuk diagonális alakra az alábbi kvadratikus alakokat! Adjunk meg egy-egy bázist, amelyben diagonális alakúak! Döntsük el, hogy milyen a jellegük! Adjunk meg olyan bilineáris függvényeket, melyekhez ezek tartoznak! Elfajulóak-e ezek a bilineáris függvények?*

a) $x_1^2 + x_1x_2$

b) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

Megoldás: A kvadratikus alak mátrixát diagonalizálhatjuk ortogonális transzformációval (mivel $\mathbf{Q}$ ortogonálisra $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$) vagy szimultán sor-oszlopműveletekkel.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ karakterisztikus polinomja $x^2 - x - \frac{1}{4}$, sajátértékei $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2})$ (már ebből is leolvasható, hogy a kvadratikus alak indefinit), ortonormált sajátbázisa $\left\{ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(1+\sqrt{2}, 1),\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}(1-\sqrt{2}, 1) \right\}$, és ebben a diagonális alakja $diag\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Lényegesen szebb alakot kapunk szimultán sor-oszlopműveletekkel. Itt az áttérés mátrixát úgy kaphatjuk meg, ha az $\mathbf{I}$ egységmátrixra is végrehajtjuk az elvégzett oszlopműveleteket, azaz miközben $\mathbf{A}$-ból $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ lesz, $\mathbf{I}$-ből $\mathbf{I}\mathbf{P} = \mathbf{P}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{a diagonális alak,}$$

és az áttérés mátrixa: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}$. Tehát ezt a diagonális alakot kapjuk a $\mathcal{B} = \{(1,0), (-\frac{1}{2}, 1)\}$ bázisban. De vannak olyan esetek, mint például egy másodfokú görbe kanonikus alakra hozása, amikor elengedhetetlen, hogy ortogonális transzformációt használjunk a diagonalizáláshoz, hogy ne torzítsuk a görbét.

b) Szimultán sor-oszlopműveletekkel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ebből leolvasható, hogy a kvadratikus alak pozitív definit, egyik diagonális alakja az egységmátrix, és az ehhez tartozó áttérési mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P},$$

tehát az új bázis $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (-1,1,0), (2,-2,1)\}$.

Ellenőrizhetjük, hogy $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{I}$ a diagonális alak.

Többféle bilineáris függvényt is találhatunk, amely ugyanezt a kvadratikus alakot adja, bár közülük csak egy szimmetrikus.

a) A lehetséges bilineáris függvények mátrixai $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1-a & 0 \end{bmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ezek közül 0 determinánsút kapunk, ha $a = 0$ vagy $a = 1$, tehát az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ elfajulók, a többi nem.

b) A lehetséges bilineáris függvények mátrixai:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 2-a & 2 & c \\ -b & 4-c & 5 \end{bmatrix},$$

de semelyik sem lehet elfajuló, mivel a kvadratikus alak pozitív definit. Ha egy bilineáris függvény elfajuló, azaz van olyan $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, amelyre $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{y} = 0$ minden $\mathbf{x}$-re, akkor $\mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y} = 0$, tehát a kvadratikus alak nem lehet se pozítív, se negatív definit.

2. *a) Mi a $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2$ bilineáris függvény Gram-mátrixa a standard bázisban és az $\{(1, 1), (0, 1)\}$ bázisban? Elfajuló-e ez a bilineáris függvény?*
b) Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak?
c) Mit mondhatunk a kvadratikus alak jellegéről?

Megoldás: a) A φ Gram-mátrixa a standard és a másik bázisban

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nem elfajuló, mert a mátrix determinánsa nem 0.

b) A kvadratikus alak $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

c) A kvadratikus alak mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, amelynek sajátértékei $0, 2$, tehát a kvadratikus alak pozitív szemidefinit.

3. *Egy valós bilineáris függvény Gram-mátrixa standard bázisban* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
a) Határozzuk meg, a hozzá tartozó kvadratikus alak mátrixát és jellegét!
b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben olyan bázist, amelyben a kvardatikus alak négyzetösszeg, és írjuk fel ebben a bázisban a kvadratikus alakot!

Megoldás:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{4} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}.$$

Tehát a kvadratikus alak indefinit, az új bázis $\mathcal{B} = \{(1, 0), \ (-\frac{5}{2}, 1)\}$. A kvadratikus alak a standard bázisban $x_1^2+5x_1x_2+x_2^2$, a $\mathcal{B}$-ben felírt négyzetösszeg alakja pedig $(x_1')^2 - \frac{9}{4}(x_2')^2$, ahol $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{5}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

4. *Egy $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$-en értelmezett komplex bilineáris függvény $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = i\overline{u}_1v_2 - i\overline{u}_2v_1$.*
a) Írjuk fel a mátrixát!
b) Hermite-féle-e a bilineáris függvény?
c) Határozzuk meg a jellegét!
d) Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben g Gram-mátrixa diagonális! Írjuk fel benne a kvadratikus alakot!

Megoldás: A mátrixa $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ önadjungált, tehát a bilineáris függvény Hermite-féle. Karakterisztikus polinomja $x^2 - 1$, sajátértékei ± 1, tehát a kvadratikus alak indefinit. Sajátvektorai: 1-hez $(i, 1)$, -1-hez $(-i, 1)$ (és nemnulla skalárszorosaik), ebből a diagonalizáló unitér mátrix $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, tehát a $\mathcal{B} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1), \ \frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1) \}$-ben a mátrixa $\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. A kvadratikus alak a standard és a $\mathcal{B}$ bázisban $i\overline{u}_1u_2 - i\overline{u}_2u_1$, illetve $\overline{u_1'}u_1' - \overline{u_2'}u_2' = |u_1'|^2 - |u_2'|^2$.

A komplex kvadratikus alakot is lehet szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonalizálni, de akkor az $s_i \mapsto cs_j$ sorműveletnek az $o_i \mapsto \overline{c}o_j$ oszlopművelet felel meg (és az $s_i \mapsto cs_i$ sorműveletnek, ha esetleg használnánk, az $o_i \mapsto \overline{c}o_j$ oszlopművelet).

5. *Mi a jellege az alábbi szimmetrikus mátrixoknak?*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az $\mathbf{A}$ mátrix jellegét a főminoros kritériummal is meg tudjuk határozni, ugyanis a sarok-aldeterminánsai nem nullák: 2, 7 és 5. Mivel mindegyik pozitív, $\mathbf{A}$ pozitív definit. (Negatív definit akkor lenne, ha $- + - + \cdots$ váltakoznának $-$-szal kezdve.)

A $\mathbf{B}$-nek már az első sarok-aldeterminánsa is 0, ezért más módszert választunk, például a sajátértékek meghatározását. $|\mathbf{B} - x\mathbf{I}| = x^2 - 2x - 1$ gyökei $1 \pm \sqrt{2}$, tehát pozitív és negatív sajátértéke is van, így a jellege indefinit. Ha szimultán sor-oszlopműveletekkel akarjuk meghatározni a jellegét, akkor először olyan műveletet kell végeznünk, ami a bal fölső elemet nemnullává teszi, például a második sort kivonjuk az elsőből, és a második oszlopot az első oszlopból:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(Megtörténhet, hogy egy ilyen "nullátlanító" műveletnél az oszlopművelet elrontja azt, amit a sorművelet megjavított, pl. ha hozzádtuk volna a második sort az elsőhöz; ilyenkor más skalárszorost kell választani.)

6. *Szimmetrikus eliminációval hozzuk az* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ *Gram-mátrixú bilineáris függvény Gram-mátrixát diagonális alakra! Milyen báziscserének felel ez meg?*
Megoldás:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

Itt $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = diag(1, -6)$.

7. *Mutassuk meg, hogy ha egy szimmetrikus bilineáris függvény Gram-mátrixa* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, *akkor alkalmas bázisban a mátrixa* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. *Határozzuk meg a báziscsere-transzformáció mátrixát!*

Megoldás: Itt is használhatunk szimmetrikus sor-oszlopműveleteket, és a végén, ha szükséges, a sorok és oszlopok megfelelő permutálásával (ez a diag. elemeket permutálja), illetve ha c áll az (i, i) helyen, akkor az i. sor és oszlop $\frac{1}{\sqrt{|c|}}$-vel való szorzásával olyan alakra hozhatjuk, ahol csak 0, 1 és -1 szerepel.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \overset{oszl.}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{oszl.}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \text{ az áttérési mátrix.}$$

8. *Bázisával adjuk meg az* $\mathbb{R}^3$ *tér* $(-1,1,0)$ *és és* $(-1,0,1)$ *vektorai által generált altér merőlegesét a* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ *szimmetrikus bilineáris függvényre nézve, ha* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$*. Elfajuló-e ez a bilineáris függvény?*

Megoldás: Azokat az $\mathbf{y}$ vektorokat kell megtalálnuk, amelyekre $\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = 0$ az altér minden $\mathbf{v}$ vektorára. Ehhez elég az összes $\mathbf{v}$ helyett csak a generátorelemekre való φ-merőlegességet biztosítani, vagyis ha $\mathbf{v}_i$-k generálják az alteret, akkor $\mathbf{v}_i^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ legyen 0 minden i-re. Ez ekvivalens azzal, hogy a $\mathbf{v}_i^T$ sorokból álló $\mathbf{B}$ mátrixra $\mathbf{BAy} = \mathbf{0}$. Most

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így a $\mathbf{BAy} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát a merőleges altér bázisa $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$. Vagyis ennek az altérnek a merőlegese éppen sajátmaga. A bilineáris függvény elfajuló, mert $\det\mathbf{A} = 0$ (az $(1,0,-1)$ vektor mindenre merőleges).