1. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok redukált és teljes SVD-felbontását!*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Megoldás: a) Mivel a mátrix önadjungált (elég, hogy normális), tartozik hozzá ortonormált sajátbázis, sőt ezt vehetjük úgy, hogy a megfelelő sajátértékek abszolút értékei csökkenőek legyenek: -2-höz $(0,1)$, 1-hez $(1,0)$ tartozik. Így a $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixszal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A diagonális mátrixban módosíthatjuk az előjeleket egy unitér mátrixszal való szorzással.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel ebben a felbontásban a két szélső mátrix unitér, a középső pedig nemnegatív diagonális, amelyben a diagonális elemek fogyó sorrendben vannak, ezek a diagonális elemek csak a szinguláris értékek lehetnek, és a felbontás a teljes SVD-felbontás. A redukált ugyanez, mert a mátrix teljes rangú négyzetes mátrix.

b) Itt is alkalmazhatunk egyszerűsített módszert, mivel a mátrix rangja 1. Nevezzük a megadott mátrixot $\mathbf{A}$-nak. Ekkor $\mathcal{O}(\mathbf{U}_1) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^*) = \overline{\mathcal{S}(\mathbf{A})} = \langle(1,1)\rangle$, tehát $\mathbf{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és az $\mathbf{A}\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ szorzatból $\mathbf{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{\Sigma}_1 = [\,2\,]$. Tehát a redukált SVD-felbontás

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [\,2\,] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}[\,1 \quad 1\,],$$

a teljeshez pedig tetszőlegesen kiegészítjük a szemiortogonális mátrixokat ortogonálissá, és a $\mathbf{\Sigma}_1$-et $\mathbf{A}$-val megegyező méretű $\mathbf{\Sigma}$-vá:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Érdemes a mátrix transzponáltjára kiszámítani a felbontást, mert akkor kisebb mátrixra (csak 2×2-esre a 3×3-as helyett) kell sajátvektorokat keresni, és aztán a felbontást megtranszponálni. Legyen tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad k_{\mathbf{A}^*\mathbf{A}}(x) = x^2 - 10x + 9, \quad \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 1$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}\mathbf{U}_1$ oszlopait a megfelelő szinguláris értékekkel ($\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$) leosztva megkapjuk a $\mathbf{V}_1$ mátrixot:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{U}_1^* = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így az eredeti mátrix redukált SVD-felbontása:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

a teljes SVD-felbontása pedig a redukált felbontás kiegészítésével:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3\sqrt{2} & -4/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

2. *Az 1. feladatbeli mátrixoknál a felbontást írjuk fel diadikus alakban is! Mik ezeknek a mátrixoknak az adott szinguláris értékekhez tartozó bal- és jobboldali szinguláris vektorai? Adjuk meg az egyes mátrixok nullterének és oszlopterének egy-egy ortonormált bázisát SVD segítségével!*

Megoldás: a) A felbontáshoz tartozó jobb szinguláris vektorok az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátvektorai: $\mathbf{u}_1 = (0, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0)$, a hozzájuk tartozó bal szinguláris vektorok a $\mathbf{V}$ oszlopai: $\mathbf{v}_1 = (0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$. A diadikus alak

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 1] + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 0] = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A nulltér ortonormált bázisát megkapjuk az $\mathbf{U}^*$ első r sora utáni oszlopaiból (az $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{U}_1^*)$ merőlegesének bázisa). Ez itt $\emptyset$. Az oszloptérét pedig a $\mathbf{V}_1$ oszlopaiból (mivel $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{V}_1)$): $\{(0, 1), (1, 0)\}$.

b) Jobb és bal szinguláris vektorok: $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1)$, diadikus alak

$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1) = 2 \cdot \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

A nulltér ortonormált bázisa $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\right\}$, az oszloptéré $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1)\right\}$.

c) A jobb szinguláris vektorok $\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, -4, 1)$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, a bal szinguláris vektorok $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, a diadikus felbontás

$$3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} [-1 \quad -4 \quad 1] + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \quad 0 \quad 1] =$$

$$= 3 \cdot \begin{bmatrix} 1/6 & 4/6 & -1/6 \\ -1/6 & -4/6 & 1/6 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

A nulltér ortonormált bázisa $\{(-2/3, 1/3, 2/3)\}$, az oszloptéré $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\right\}$.

3. *Számítsuk ki az 1.-beli mátrixok pszeudoinverzét az SVD-felbontás segítségével!*

Megoldás: A $\mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{U}_1^*$ redukált felbontású mátrix pszeudoinverze $\mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}_1^*$.
Az első mátrix invertálható, tehát a pszeudoinverze az inverz, és ez diagonális mátrixra amúgy is könnyen leolvasható, tehát csak a képlet gyakorlása kedvéért írjuk fel az SVD-ből.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{\|-1\|} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

A másik két mátrix pszeudoinverze:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{\|-1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} [\,1/2\,] \frac{1}{\sqrt{2}} [\,1 \quad 1\,] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{\|-1\|} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

4. *Számítsuk ki az 1. feladatbeli négyzetes mátrixok poláris felbontását SVD segítségével!*

Megoldás: Ha $\mathbf{A} = \mathbf{V\Sigma U}^*$ teljes SVD-felbontás, akkor $\mathbf{A}$ poláris felbontása $\mathbf{A} = (\mathbf{V\Sigma V}^*)(\mathbf{VU}^*)$.

Ez az 1.a) feladat mátrixánál $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, az 1.b)-nél $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

5. *Adjuk meg az 1.-beli nem 1-rangú mátrixok legjobb 1-rangú közelítését! Mekkora a közelítő mátrix eltérése Frobenius-normában?*

Megoldás: Az 1.a) mátrixra

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\,2\,] [\,0 \quad -1\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \text{ Az eltérés } \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_F = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} = 1,$$

vagy a tételből adódóan a kihagyott szinguláris értékek négyzetösszegének négyzetgyöke, ami $\sqrt{1^2} = 1$.

Az 1.c) mátrixra

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [\,3\,] \frac{1}{3\sqrt{2}} [\,-1 \quad -4 \quad 1\,] = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Az eltérés $\sqrt{\frac{1}{4} + 0^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0^2 + \frac{1}{4}} = 1$, illetve $\sqrt{\sigma_2^2} = 1$.

6. *Adjunk meg olyan valós szimmerikus nem diagonális mátrixot, amelynek minden sarokaldeterminánsa nemnegatív és a mátrix negatív szemidefinit!*

Megoldás: El lehet érni, hogy minden sarokaldetermináns 0 legyen, például azzal, hogy az első sor és első oszlop 0 legyen, és a bal alsó sarokba tetszőleges nem diagonális szimmetrikus negatív definit mátrixot tehetünk, pl. a $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ mátrixot. Tehát legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ennek a (például szimultán sor-oszlopműveletekkel kapható) diagonális alakjában az átlós elemek $0, -1, -1$.

7. *Mutassuk meg, hogy ha egy* $\mathbf{A}$ *komplex négyzetes mátrix poláris felbontásában* $\mathbf{A} = \mathbf{SU} = \mathbf{US}$*, azaz a pozitív szemidefinit és az unitér rész felcserélhető, akkor* $\mathbf{A}$ *normális mátrix!*

Megoldás: $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = (\mathbf{US})^*(\mathbf{US}) = \mathbf{S}^*\mathbf{U}^*\mathbf{US} = \mathbf{S}^*\mathbf{S} = \mathbf{S}^2$, és $\mathbf{AA}^* = (\mathbf{SU})(\mathbf{SU})^* = \mathbf{SUU}^*\mathbf{S}^* = \mathbf{SS}^* = \mathbf{S}^2$, így $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{AA}^*$ (az átalakításban felhasználtuk, hogy $\mathbf{U}$ unitérsége miatt $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{UU}^* = \mathbf{I}$, and $\mathbf{S}$ önadjungáltsága miatt $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}$).

8. *Legyen* $\mathbf{A} = \mathbf{SU}$ *poláris felbontás, ahol* $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *és* $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Határozzuk meg* $\mathbf{A}$ *egy SVD-felbontását!*

Megoldás: Mivel S pozitív szemidefinit önadjungált mátrix, az $\mathbf{SU}$ SVD-felbontásához elég az $\mathbf{S}$ mátrixot unitéren diagonalizálni úgy, hogy a sajátértékek fogyó sorrendben következzenek.
$|\mathbf{S} - x\mathbf{I}| = (x^2 - 2x)(1 - x) = -(x - 2)(x - 1)x$, így a sajátértékek $2, 1, 0$, és az egyes sajátértékekhez tartozó ortonormált sajátvektorok $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, illetve $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.
Tehát

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

9. *Határozzuk meg a 8. feladatbeli* $\mathbf{S}$ *mátrix négyzetgyökét!*

Megoldás: Az előző feladatban kiszámított $\mathbf{V}$ unitér mátrixszal, amellyel $\mathbf{S} = \mathbf{V} \cdot \operatorname{diag}(2, 1, 0) \cdot \mathbf{V}^*$, az $\mathbf{S}$ (egyik) négyzetgyöke $\mathbf{V} \cdot \operatorname{diag}(\sqrt{2}, 1, 0) \cdot \mathbf{V}^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$