1. *Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja? Adjuk meg a determinánsosztókat és invariáns faktorokat is!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: **A** diagonalizálható (már csak azért is, mert valós szimmetrikus). Mivel minden sorösszege 5, **A**-nak sajátértéke az 5 az $(1,1,1,1,1)$ sajátvektorral. Mivel **A** rangja 1, a 0 is sajátértéke 4-dimenziós sajátaltérrel. Így **A** diagonális (és akkor Jordán-féle) alakja $\operatorname{diag}(5,0,0,0,0)$. Minimálpolinomjában minden sajátérték csak egyszeres gyök lehet, tehát a minimálpolinom $m(x) = (x-5)x$, és ez meg kell, hogy egyezzen az E_5 invariáns faktorral. Az invariáns faktorok rendre osztják a következőt, és a szorzatuk a karakterisztikus polinom skalárszorosa, $(x-5)x^5$, tehát mindegyik csak x vagy 1 lehet:
$E_1 = 1$, $E_2 = x$, $E_3 = x$, $E_4 = x$, $E_5 = (x-5)x$,
a D_j determinánsosztó pedig $E_1 \cdots E_j$:
$D_1 = 1$, $D_2 = x$, $D_3 = x^2$, $D_4 = x^3$, $D_5 = (x-5)x^4$.

B sajátértékei 2 és -5, és $r(B-2I) = 2$ miatt a 2-höz tartozó sajátaltér csak 1-dimenziós, tehát **B** nem diagonalizálható, és így a Jordan-alakja

$$\mathcal{J}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

A minimálpolinom, $(x-2)^2(x+5)$, a karakterisztikus polinom skalárszorosa, így
$E_1 = 1$, $E_2 = 1$, $E_3 = (x-2)^2(x+5)$,
$D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = (x-2)^2(x+5)$.

C egyetlen sajátértéke a 2, és $r(\mathbf{C}) = 2 \Rightarrow \dim V_2 = 1$, ezért a Jordan-normálalakja egyetlen blokkból áll:

$$\mathcal{J}(\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A minimálpolinomja $m(x) = (x-2)^3 = -k(x)$, ezért az előző esethez hasonlóan
$E_1 = 1$, $E_2 = 1$, $E_3 = (x-2)^3$,
$D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = (x-2)^3$.

D ortogonális, tehát diagonalizálható. A karakterisztikus polinomja $-(x^3-1)$, tehát a sajátértékei $1, \varepsilon, \varepsilon^2$, ahol $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. A Jordan-normálalakja $\operatorname{diag}(1,\varepsilon,\varepsilon^2)$. A minimálpolinomja $(x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2) = x^3-1$, tehát $E_1 = 1$, $E_2 = 1$, $E_3 = x^3-1$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = x^3-1$.

2. *Határozzuk meg az 1. feladatbeli* **A** *mátrixokra* $\mathbf{J}^{100}$, $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{\mathbf{A}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ *értékét, ahol* **J** *az* **A** *mátrix Jordan-féle normálalakja! Szükség esetén használjunk Hermite-polinomot!*

Megoldás: $\mathcal{J}(\mathbf{A})^{100} = \operatorname{diag}(5^{100},0,0,0,0)$, $e^{\mathcal{J}(\mathbf{A})} = \operatorname{diag}(e^5,1,1,1,1)$,
$\mathcal{J}(\mathbf{D})^{100} = \operatorname{diag}(1^{100},\varepsilon^{100},\varepsilon^{200}) = \operatorname{diag}(1,\varepsilon,\varepsilon^2) = \mathcal{J}(\mathbf{D})$,
$e^{\mathcal{J}(\mathbf{D})} = \operatorname{diag}(e, e^{\varepsilon}, e^{\varepsilon^2})$, ahol $e^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{e}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2})$, és $e^{\varepsilon^2} = \frac{1}{\sqrt{e}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$$\mathcal{J}(\mathbf{B})^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100\cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \qquad e^{\mathcal{J}(\mathbf{B})} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{C})^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100\cdot 2^{99} & 4950\cdot 2^{98} \\ 0 & 2^{100} & 100\cdot 2^{99} \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{bmatrix}, \qquad e^{\mathcal{J}(\mathbf{C})} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & e^2/2 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix},$$

mert $f(x) = x^{100}$-ra $f'(x) = 100x^{99}$ és $f''(x) = 9900x^{98}$, míg $f(x) = e^x$-re $f'(x) = f''(x) = e^x$.

Az eredeti $\mathbf{M}$ mátrix függvényeit kiszámolhatjuk a $\mathbf{P}\mathcal{J}(\mathbf{M})\mathbf{P}^{-1}$ képlettel, ahol $\mathbf{P}$ oszlopai Jordan-bázist adnak, vagy Hermite-interpolációval. Mintának egy-egy függvényt kiszámolunk az adott mátrixokból.

Az $\mathbf{A}$ mátrixra a nagyon egyszerű $\mathbf{A}^2 = 5\mathbf{A}$ összefüggés könnyűvé teszi a hatványozást, például közvetlenül adódik, hogy $\mathbf{A}^n = 5^{n-1}\mathbf{A}$, ha $n \geq 1$, speciálisan $\mathbf{A}^{100} = 5^{99}\mathbf{A}$, és még a többi függvényt is érdemesebb a Taylor-sorból kiszámolni, mint az előbb említett módszerekkel:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathbf{A}^n = c_0\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n 5^{n-1}\mathbf{A} = c_0\mathbf{I} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n 5^n\right)\frac{1}{5}\mathbf{A} = c_0\mathbf{I} + (f(5) - c_0)\frac{1}{5}\mathbf{A}.$$

Speciálisan $f(x) = e^x$-re

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + (e^5 - 1)\frac{1}{5}\mathbf{A},$$

tehát az az 5×5-ös mátrix, amelynek mindegyik diagonális eleme $\frac{e^5+4}{5}$, a többi pedig $\frac{e^5-1}{5}$.

A $\mathbf{B}$ mátrixhoz könnyű Jordan-bázist találni: az eredeti $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$ bázisban csak az első elemet kell megduplázni, hogy a második oszlop első eleme (az $\mathbf{e}_2$ képében az első báziselem együtthatója) 2 helyett 1 legyen, és ez a többi oszlopot nem befolyásolja (az első elem így is, úgy is sajátvektor, más báziselem képében pedig nem jelenik meg az első báziselem). Tehát például

$$e^{3\mathbf{B}} = \mathbf{P}e^{3\mathcal{J}(\mathbf{B})}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^6 & 3e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^6 & 6e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}$$

Az $e^{\mathbf{C}}$ kiszámításához használjunk Hermite-interpolációt! 2 az egyetlen sajátérték, és ez háromszoros multiplicitású (a minimálpolinomban is), tehát a keresett polinomnak a 0., 1. és 2. deriváltja kell, hogy megegyezzen a 2-ben a megadott függvény és deriváltjai megfelelő értékeivel. Ha a polinom $p(x) = a + bx + cx^2$, akkor ez a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 4c & = & e^2 \\ & & b & + & 4c & = & e^2 \\ & & & & 2c & = & e^2 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{rcl} a & = & e^2 \\ b & = & -e^2 \\ c & = & \frac{1}{2}e^2 \end{array} \quad\Rightarrow\quad e^{\mathbf{C}} = p(\mathbf{C}) = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{D}$ permutációmátrix, amelynek a köbe $\mathbf{I}$, ezért $\mathbf{D}^{100} = \mathbf{D}^{99}\mathbf{D} = \mathbf{I}^{33}\mathbf{D} = \mathbf{D}$.

3. *Legyen* $\mathbf{A}$ 10×10*-es valós mátrix! Jelölje* r_i *az* $\mathbf{A}^i$ *rangját! Lehet-e az* $(r_1, r_2, \ldots)$ *sorozat egyenlő az alábbiakkal?*

a) $(5, 6, \ldots)$*;*
b) $(9, 8, 7, \ldots, 4, 4, \ldots)$*;*

Megoldás: a) Ez a rangsorozat nem lehetséges, mert $\operatorname{Im} \mathbf{A}^{k+1} \leq \operatorname{Im} \mathbf{A}^k$ minden k-ra, tehát a rangoknak is csökkenniük kellene, itt viszont az 5 után 6 következik.

b) Ilyen rangsorozatot kaphatunk, ha egy olyan Jordan-mátrixot veszünk, amelynek egyetlen 0-blokkja van, így ennek a hatványozásánál mindig 1-gyel csökken a rang, amíg 0-vá nem válik a blokk. Ez a rangsorozat szerint akkor következik be, amikor a rang 4, ezért a 0-blokk 6×6-os. Ezt a 0-blokkkot kiegészíthetjük tetszőleges invertálható diagonális blokkal, például egy 4×4-es egységmátrixszal.

4. *Egy* 10×10*-es* $\mathbf{A}$ *mátrix sajátértékei* $\lambda_1 = 1$*,* $\lambda_2 = 2$ *Az* $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}$ *hatványainak rangja rendre* $8, 6, 5, 4, 4$*. Az* $\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}$ *hatványainak rangja rendre* $7, 6, 6$*. Írjuk fel* $\mathbf{A}$ *Jordan-féle normálalakját!*

Megoldás: Írjuk fel egy táblázatba a rangok sorozatát (a nulladik hatvánnyal, tehát az egységmátrixszal kezdve). Ekkor a második differenciasorozat adja meg az adott sajátértékhez tartozó adott mérető Jordan-blokkok számát.

$$\begin{array}{c|ccccccccccc} k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\ \hline r((\mathbf{A}-\mathbf{I})^k & 10 & & 8 & & 6 & & 5 & & 4 & & 4 \\ & & 2 & & 2 & & 1 & & 1 & & 0 & \\ & & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} k & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\ \hline r((\mathbf{A}-2\mathbf{I})^k & 10 & & 7 & & 6 & & 6 \\ & & 3 & & 1 & & 0 & \\ & & & 2 & & 1 & & \end{array}$$

Tehát a Jordan-alakban egy 2×2-es és egy 4×4-es 1-blokk, és két 1×1-es és egy 2×2-es 2-blokk van. Azaz $\mathcal{J}(\mathbf{A}) = \operatorname{diag}(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3, \mathbf{J}_4, \mathbf{J}_5)$, ahol

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = [\,2\,], \quad \mathbf{J}_4 = [\,2\,], \quad \mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. *Mutassuk meg, hogy ha két* 3×3*-as vagy* 2×2*-es komplex mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.*

Megoldás: A karakterisztikus polinomban minden $(x - \lambda)$ gyöktényező kitevője legföljebb $a = 3$, a minimálpolinomban ezért csak 1, $a - 1$ vagy a lehet. A Jordan-normálalakban az első esetben minden λ-blokk 1×1-es, a másodikban van egy $(a-1) \times (a-1)$-es λ-blokk, és akkor azon kívül már csak egy 1×1-es lehet, a harmadikban pedig egyetlen $a \times a$-as λ-blokk van. Tehát ilyen méretű mátrixokra a karakterisztikus polinom és a minimálpolinom meghatározza a Jordan-normálalakot, így ezek között az azonos karakterisztikus és minimálpolinommal rendelkező mátrixok Jordan-normálalakja megegyezik, vagyis az ilyen mátrixok hasonlók egymáshoz.

6. *Van-e olyan* 3×3*-as* $\mathbb{Q}$ *feletti mátrix, melynek minimálpolinomja*

a) $x^2 - 2$
b) $x^2 + x$

Megoldás: a) $k_A(x)$ -1 főegyütthatós harmadfokú polinom, amelynek osztója az x^2-2, és a gyökei csak $\pm\sqrt{2}$, tehát vagy $-(x^2-2)(x-\sqrt{2}) = -(x^3-\sqrt{2}x^2-2x+2\sqrt{2})$, vagy $-(x^2-2)(x+\sqrt{2}) = -(x^3+\sqrt{2}x^2-2x-2\sqrt{2})$, de egyik sem racionális együtthatós, pedig egy $\mathbb{Q}$ fölötti $\mathbf{A}$ mátrixra $k_{\mathbf{A}}(x) = |\mathbf{A}-x\mathbf{I}| \in \mathbb{Q}[x]$. Tehát nincs ilyen mátrix.

b) Az előzőhöz hasonlóan a karakterisztikus polinom ebben az esetben csak $-(x^2+x)x = -x^2(x+1)$ vagy $-(x^2+x)(x+1) = -x(x+1)^2$ lehet. Ilyen valóban előfordul, sőt az 5. feladat szerint ez a két mátrix hasonlóság erejéig egyértelmű is. Mivel a mátrix minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres, a mátrix diagonalizálható, és diagonális alakja $\operatorname{diag}(0,0,-1)$, illetve $\operatorname{diag}(0,-1,-1)$, maga is $\mathbb{Q}$ fölötti.

7. *Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, melynek*

a) karakterisztikus polinomja $(x-1)^6$, minimálpolinomja $(x-1)^4$, az 1-hez tartozó V_1 sajátaltér dimenziója 2;

b) karakterisztikus polinomja $-(x-\lambda)^7$, minimálpolinomja $(x-\lambda)^3$, $\dim(V_\lambda)=3$, ahol V_λ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér?

Megoldás: a) 6×6-os mátrix, amelynek csak 1 a sajátértéke, és a Jordan-normálalakjában a legnagyobb blokk 4×4-es, és összesen két Jordan-blokkja van, tehát a Jordan-normálalak egy 4×4-es és egy 2×2-es 1-blokkot tartalmaz.

b) Ez egy 7×7-es mátrix, amelynek egyetlen sajátértéke a λ, legnagyobb Jordan-blokkja 3×3-as, és összesen három Jordan-blokkja van. 7-nek két ilyen felbontása is van: $7=3+3+1$ vagy $7=3+2+2$, tehát kétféle Jordan-alak is lehetséges:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

8. *Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek*

a) karakterisztikus polinomja $-(x-1)^3(x-3)^4$;

b) minimálpolinomja $(x+2)^6$, és sajátaltere 2-dimenziós?

Megoldás: a) A Jordan-normálalakban az 1-blokkok méretének megoszlása lehet 3, $2+1$ vagy $1+1+1$, a 3-blokkoké 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$ vagy $1+1+1+1$. Ez összesen $3\cdot 5 = 15$ lehetőség.

b) A mimimálpolinomból következik, hogy a mátrix egyetlen sajátértéke -2, és a legnagyobb Jordan-blokkja 6×6-os. A sajátaltér dimenziója miatt pedig csak két Jordan-blokk lehet, így a kisebbiknek a mérete $1,2,3,4,5$ vagy 6 lehet, ez összesen 6 lehetőség.

9. *Mi lehet az $\mathbf{A}^2$ mátrix minimálpolinomja, ha $\mathbf{A}\in M_n[\mathbb{C}]$ minimálpolinomja $(x+1)^2$?*

Megoldás: Ha $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$, akkor $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^2(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2 = (\mathbf{A}^2-\mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$, így $\mathbf{A}^2$ minimálpolinomja osztója az $(x-1)^2$ polinomnak. Viszont $x-1$ nem lehet, mert ha $\mathbf{A}^2-\mathbf{I}=\mathbf{0}$ lenne, akkor $\mathbf{A}$ minimálpolinomja osztója lenne (x^2-1)-nek. Tehát $\mathbf{A}^2$ minimálpolinomja $(x-1)^2$.

Másképp: $\mathbf{A}$ Jordan-alakjában, $\mathcal{J}(\mathbf{A})$-ban csak 2×2-es és 1×1-es -1-blokkok vannak (és van legalább egy 2×2-es). $\mathcal{J}(\mathbf{A})^2$ diagonális blokkjai $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $[\,1\,]$ alakúak, tehát 1 az egyetlen sajátértéke, és $(\mathcal{J}(\mathbf{A})^2-\mathbf{I})$-nek a négyzete $\mathbf{0}$, de maga nem, tehát $\mathcal{J}(\mathbf{A})^2$-nek és így a hozzá hasonló $\mathbf{A}^2$-nek is a minimálpolinomja $(x-1)^2$.