1. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakját, egy Jordan-bázisát és a Jordan-láncokat!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)^2(x-1)^2$.
$r(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = 3 \Rightarrow \dim V_2 = 4-3 = 1 \Rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{A})$-ban egy 2-blokk van, és így ez 2×2-es.
$r(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = 2 \Rightarrow \dim V_1 = 4-2 = 2 \Rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{A})$-ban két 1-blokk van, és így ezek 1×1-esek.
Tehát

$$\mathcal{J}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda = 2$-höz egyetlen 2 hosszúságú Jordan-láncot kell keresnünk, mert egyetlen 2×2-es Jordan-blokk van. Először $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$ magterének, K_i-nek a bázisát kell megtalálnunk (most $i = 1, 2$-re). Aztán az i csökkenő rendjében (az alábbiakban jobbról balra) a K_i bázisából a jobbról érkező Jordan-láncok K_i-beli elemei és a K_{i-1} báziselemei által generált altérhez kiegészítő báziselemeket választani (ezt bonyolultabb esetben Gauss-eliminációval végezhetnénk).
A K_i magtér meghatározásához $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$ redukált lépcsős alakjára van szükségünk: $\mathbf{L}_i$. Ezután az $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{i+1}$ redukálásához elég az $\mathbf{L}_i(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ alakból kiindulnunk, mert ha $\mathbf{L}_i = \mathbf{P}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$ valamely invertálható $\mathbf{P}$-re, akkor az $\mathbf{L}_i(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{i+1}$ mátrixot is megkaphatjuk az $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{i+1}$ mátrixból ugyanazokkal az elemi sorműveletekkel. Az egyenletrendszerből kihagyhatjuk a $\mathbf{0}$ sorokat, s mivel ezek a jobbról szorzásnál továbbra is $\mathbf{0}$ sorokba mennének, ez nem változtat a későbbi egyenletrendszerek megoldásán. (A Jordan-láncok előállításához nem kell előre meghatározni a Jordan-normálalakot: addig folytatjuk a hatványozást, amíg még csökken a mátrix rangja.)

$$\mathbf{A}-2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot(\mathbf{A}-2\mathbf{I})} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad K_2 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jordan-lánc(ok) $\lambda = 2$-höz:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xleftarrow{(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\cdot} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A $\lambda = 1$-hez tartozó általánosított sajátvektorok mind sajátvektorok, tehát a Jordan-láncok itt 1-eleműek, a V_1 bázisát kell csak meghatározni.

$$\mathbf{A}-\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a Jordan-bázis a fenti vektorokból $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$.

B egyetlen sajátértéke a 3.

$$\mathbf{B}-3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad\mapsto\quad \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot(\mathbf{B}-3\mathbf{I})} \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$K_1: \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad K_2: \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Jordan-lánc(ok) $\lambda = 3$-hoz:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}3\\0\\0\\0\end{bmatrix} \xleftarrow{(\mathbf{B}-3\mathbf{I})\cdot} \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\3\\0\end{bmatrix} \xleftarrow{(\mathbf{B}-3\mathbf{I})\cdot} \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

A Jordan-bázis a fent kapott $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$, és a Jordan-normálalak két 2×2-es 3-blokkból áll:

$$\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}.$$

2. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok komplex és valós Jordan-féle normálalakját!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&2&0\\-2&0&0\\2&0&4\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}2+i&1&0&0\\0&2+i&0&0\\0&0&2-i&1\\0&0&0&2-i\end{bmatrix}$$

Megoldás: $|\mathbf{A} - x\mathbf{I}| = (4-x)(x^2+4) = -(x-4)(x-2i)(x+2i)$. Mivel a karakterisztikus polinomnak mindegyik gyöke egyszeres, **A** diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött, és diagonális alakja $\operatorname{diag}(4, 2i, -2i)$. A **B** mátrix eleve Jordan-normálalakban van. A valós Jordan-alakokban az $a+bi$-hez és $a-bi$-hez tartozó azonos méretű blokkokat egy-egy 2×2-es blokkokból álló blokk-Jordan-mátrixszá vonjuk össze, ahol az átlóban $D = \begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}$ blokkok állnak, a fölöttük levő ferde sorban pedig 2×2-es egységmátrixok.

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix}4&0&0\\0&0&2\\0&-2&0\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} \sim \begin{bmatrix}2&1&1&0\\-1&2&0&1\\0&0&2&1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$$

3. *Keressük meg azt a p Hermite-féle interpolációs polinomot, melyre $e^{\mathbf{A}t} = p(\mathbf{A})$, ahol t valós paraméter! Határozzuk meg az **A** mátrix **J** Jordan-alakját és egy Jordan-bázist. Ennek segítségével is számítsuk ki $e^{\mathbf{A}t}$-t!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_{\mathbf{A}}(x) = -x^3$. Mivel $\mathbf{A}$-nak egyetlen sajátértéke a 0, és $r(\mathbf{A}) = 2$ miatt ez a minimálpolinomnak is háromszoros gyöke, $p(x)$ olyan legföljebb másodfokú polinom lesz, amelyre az $f(x) = e^{xt}$ függvénnyel $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ és $p''(0) = f''(0)$. Ha $p(x) = a + bx + cx^2$, akkor a következő egyenletrendszert kapjuk.

$$\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b &=& t \\ 2c &=& t^2 \end{array} \Rightarrow e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 1 & t+\frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$-hoz Jordan-bázist is kereshetünk (a 0 sajátértékhez kell 3 hosszúságú Jordan-láncot találnunk).

$$\mathbf{A}= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_1: \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad K_2: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad K_3: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jordan-lánc:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}\cdot} \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}\cdot} \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, és

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathcal{J}(\mathbf{A})}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 1 & t+\frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. *Mutassuk meg, hogy minden négyzetes komplex elemű mátrix hasonló a transzponáltjához! (Használjuk a determinánsosztókat!)*

Megoldás: Az $\mathbf{A} - x\mathbf{I}$ mátrix $i \times i$-es részmátrixai az $\mathbf{A}^T - x\mathbf{I} = (\mathbf{A} - x\mathbf{I})^T$ $i \times i$-es részmátrixainak transzponáltjai, ezért az $i \times i$-es aldeterminánsok értékei ugyanazok a két mátrixra. Ebből következik, hogy ezek legnagyobb közös osztója, a mátrixok D_i determinánsosztója is ugyanaz minden i-re, következésképpen az $E_i = D_i/D_{i-1}$ invariáns faktorok is megegyeznek. Tehát a két mátrix Jordan-normálalakja ugyanaz, vagyis $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^T$ hasonló egymáshoz.

Egy másik bizonyítás: Legyen $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakja, tehát $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$. Elég belátni, hogy $\mathbf{J}$ hasonló a transzponáltjához, ugyanis $\mathbf{J}^T = \mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^{-1})^T = \mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^T)^{-1}$ hasonló $\mathbf{A}^T$-hoz. Egy Jordan-blokk hasonló a transzponáltjához, mert ha a báziselemeket fordított sorrendben írjuk fel, a mátrix 180°-os elforgatottját kapjuk, ami a Jordan-blokk esetében megegyezik a transzponálttal. A teljes Jordan-mátrix transzponáltját ezek szerint úgy kaphatjuk meg, hogy az egyes blokkokhoz tartozó báziselemeket a blokkon belül megfordítjuk, de a blokkok sorrendjét nem változtatjuk meg. Tehát $\mathbf{J}$ és $\mathbf{J}^T$ hasonlók.

5. *Mutassuk meg, hogy, ha egy komplex elemű négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrix* k*-adik hatványa az egységmátrix, akkor* $\mathbf{A}$ *diagonalizálható.*

Megoldás: $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A}$ minimálpolinomja osztója az $x^k - 1$ polinomnak. Mivel ennek minden gyöke egyszeres (a k darab k-adik egységgyök), a minimálpolinomnak sincs többszörös gyöke, tehát a mátrix diagonalizálható.

6. *Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak van négyzetgyöke! Mutassuk meg, hogy szinguláris mátrixokra ez nem feltétlenül igaz! Határozzuk meg az* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *mátrix négyzetgyökét!*

Megoldás: Elég a reguláris Jordan-blokkokra belátni az állítást, ugyanis akkor egy teljes Jordan-mátrixból is lehet négyzetgyököt vonni (minden diagonális blokkot egy négyzetgyökével helyettesítve), és akkor a $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ Jordan-normálalak $\mathbf{M}$ négyzetgyökével $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{M}^2\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{P}\mathbf{M}\mathbf{P}^{-1})^2$.
Legyen $\mathbf{J}$ egy $n \times n$-es λ-blokk, és $\mu^2 = \lambda$. Ha $\mathbf{N}$ egy $n \times n$-es μ-blokk, akkor $\mathbf{N}^2$ átlójában λ, fölötte 2μ, fölötte 1-ek vannak, mindenhol máshol 0. Mivel $\mu \neq 0$, az $\mathbf{N}^2 - \lambda\mathbf{I}$ mátrix lépcsős alakú, $(n-1)$ rangú, ezért $\mathbf{N}^2$ Jordan-normálalakja egy $n \times n$-es λ-blokk, azaz van olyan invertálható $\mathbf{P}$, amelyre $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}^2\mathbf{P} = \mathbf{J}$, vagyis $\mathbf{J} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P})^2$.

Szinguláris mátrixból viszont nem feltétlenül lehet négyzetgyököt vonni. Például az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixnak nem lehet négyzetgyöke, mert ha lenne, annak is csak 0 lehetne a sajátértéke, így minimálpolinomja csak x vagy x^2 lehetne, de akkor annak a négyzete 0 lenne, és nem $\mathbf{A}$.

Mivel a megadott $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei pozitív valós számok, $\mathbf{A}$ (egyik) négyzetgyökét az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény Hermite-interpolálásával is ki lehet számolni (és azzal kényelmesebb is). Azt a $p(x) = a + bx$ polinomot kell meghatározni, amelyre $a + 2b = p(2) = f(2) = \sqrt{2}$, és $b = p'(2) = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, azaz $p(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x$. Tehát $\mathbf{A}$ egyik négyzetgyöke $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{I} + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{A} = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

7. *Adjunk új bizonyítást a Cayley-Hamilton-tételre a mátrixok Jordan-féle normálalakját használva!*

Megoldás: Ha $k_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{a_1}\cdots(x-\lambda_k)^{a_k}$, akkor a $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ Jordan-normálalakban (amelynek a karakterisztikus polinomja ugyanaz) a λ_i-blokkok méretének az összege a_i, ezért a legnagyobb λ_i-blokk is legföljebb a_i méretű. Tehát $\mathbf{J} - \lambda_i\mathbf{I}$-ben a 0-blokkok legföljebb a_i méretűek, és ezeknek az a_i-edik hatványa 0. Ebből következik, hogy a $k_{\mathbf{A}}(\mathbf{J}) = (-1)^n(\mathbf{J}-\lambda_1\mathbf{I})^{a_1}\cdots(\mathbf{J}-\lambda_k)^{a_k}$ szorzatban minden diagonális blokk valamelyik tényezőben $\mathbf{0}$, így $k_{\mathbf{A}}(\mathbf{J}) = \mathbf{0}$. Tehát ha $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, akkor $k_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = k_{\mathbf{A}}(\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P}k_{\mathbf{A}}(\mathbf{J})\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{0}$.

8. *Hasonlóság erejéig hány olyan* 3×3*-as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a köbével?*

Megoldás: Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} \in M_3(\mathbb{C})$, és $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2$. Ekkor $\mathbf{A}$ minimálpolinomja osztója az $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ polinomnak. Ebből következik, hogy $\mathbf{A}$ sajátértékei csak 0 vagy 1 lehetnek. Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, akkor a Jordan-normálalakja diagonális, 1-ekkel és/vagy 0-kkal az átlóban. Mivel a hasonlósági osztályokban a Jordan-blokkok sorrendje változtatható, csak az számít, hogy hány 1 és hány 0 van az átlóban: ez négy lehetőség. Ha $\mathbf{A}$ nem diagonalizálható, akkor a minimálpolinomnak van többszörös gyöke, és ez az $m_{\mathbf{A}}(x) \mid x^2(x-1)$ miatt csak a 0 lehet. Tehát a minimálpolinom vagy x^2, vagy $x^2(x-1)$. Az első esetben a karakterisztikus polinom csak $-x^3$ lehet, és a Jordan-normálalak egy 2×2-es és egy 1×1-es 0-blokkból áll, a másodikban a karakterisztikus polinom $-x^2(x-1)$, és a Jordan-normálalak egy 2×2-es 0-blokkból és egy 1×1-es 1-blokkból áll. Tehát hasonlóság erejéig hat olyan mátrix van, amelynek a köbe megegyezik a négyzetével, és ezek Jordan-normálalakja

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

9. *Mutassuk meg, hogy minden $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, n-edfokú 1-főegyütthatós, valós polinomhoz van olyan $n \times n$-es valós mátrix, aminek $p(x)$ vagy $-p(x)$ karakterisztikus polinomja, nevezetesen*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

az úgynevezett kísérőmátrix. Mutassuk meg, hogy ennek a mátrixnak a karakterisztikus polinomja egyúttal minimálpolinomja is!

Megoldás: n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyíthatjuk, hogy ennek a mátrixnak a karakterisztikus polinomja $(-1)^n p(x)$. $n = 1$-re $\mathbf{A} = [\,-a_0\,]$, és $k_{\mathbf{A}}(x) = -(x + a_0)$. Ha $(n-1)$-re igaz az állítás, akkor az n-re a determinánst az első sor szerint kifejtve azt kapjuk, hogy $k_{\mathbf{A}}(x) = -x(-1)^{n-1}(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_2x + a_1) + (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (-1)^n p(x)$.
Az $\mathbf{e}_1$ vektorra $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{A}^2\mathbf{e}_1, \ldots$, $\mathbf{e}_n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{e}_1$ lineárisan függetlenek, ezért nincs olyan $f(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1} \neq 0$ polinom, amelyre $f(\mathbf{A})\mathbf{e}_1 = c_0\mathbf{e}_1 + c_1\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{n-1}\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ lenne. Így $\mathbf{A}$ minimálpolinomja legalább n-edfokú, másrészt osztója a karakterisztikus polinomnak, tehát csak $p(x)$ lehet.