1. *a) Rajzoljuk le az alábbi mátrixok sor és oszlop szerinti Gersgorin-köreit!*
b) Jelöljük be a sajátértékeket és a mátrixok spektrálsugarát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

a) Az **A** sorokhoz tartozó Gersgorin-körei az 1 körüli 1 sugarú és a 2 körüli 2 sugarú kör, ezek uniója a 2 körüli 2 sugarú kör. Az oszlopokhoz tartozó körök az 1 körüli 2 sugarú kör, és a 2 körüli 1 sugarú kör. Ezek uniója az 1 körüli 2 sugarú kör.
A **B** sorokhoz tartozó Gersgorin-körei a 3 körüli 3 sugarú kör és a 0 körüli 0 sugarú kör. Ezek uniója a 3 körüli 3 sugarú kör. Az oszlopokhoz tartozó Gersgorin-körök a 3 körüli 0 sugarú és a 0 körüli 3 sugarú kör. Ezek uniója a 0 körüli 3 sugarú kör.
A **C** sorokhoz tartozó Gersgorin-körei a 2 körüli 2 sugarú kör, a 3 körüli 1 sugarú kör, és a 0 körüli 0 sugarú kör. Ezek uniója a 2 körüli 2 sugarú kör. Az oszlopokhoz tartozó Gersgorin-körök a 2 körüli 1 sugarú kör, a 3 körüli 1 sugarú kör, és a 0 körüli 1 sugarú kör.

b) **A** sajátértékei 0 és 3 valóban beleesnek a 2 körüli 2 sugarú körnek és az 1 körüli 2 sugarú körnek a metszetébe. A spektrálsugár 3.
B sajátértékei 0 és 3, ezekről is láthatjuk, hogy benne vannak a 3 körüli 3 sugarú és a 0 körüli 3 sugarú körök metszetében. A spektrálsugár itt is 3. **C** sajátértékei 0 és $\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Ezek is benne vannak a 2 körüli 2 sugarú körben ($|\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i - 2| = |\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i| = 1$), és az oszlopokhoz tartozó körök uniójában is (0 a 0 körüliben, a másik kettő a 2 körüliben és a 3 körüliben is). A spektrálsugár itt $|\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i| = \sqrt{7}$.

2. *Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi* **A** *mátrixnak van legalább két valós sajátértéke! (Használjuk a Gersgorin-köröket!)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az oszlopokhoz tartozó Gersgorin-körök:

$$G_1: \ |z-2| \le 1, \quad G_2: \ |z-9| \le 1, \quad G_3: \ |z-2| \le 5, \quad G_4: \ |z-6| \le 1.$$

Itt $G_1 \cup G_3 \cup G_4 = G_3$ diszjunkt G_2-től, ezért a négy sajátértékből (multiplicitással számolva) az első hármat, a második egyet tartalmaz. Viszont valós együtthatós polinom (ilyen a valós mátrix karakterisztikus polinomja is) nemvalós gyökei konjugált párokat alkotnak, tehát az x tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el, ahogy a G_1, G_2, G_3, G_4 Gersgorin-körök is. Így a G_3-ba eső három sajátértékből legföljebb egy pár lehet az x tengelyen kívül, a G_2-ben levő pedig szükségképpen az x tengelyen van. Tehát **A**-nak van legalább két különböző valós gyöke. (Valójában pontosan két valós gyöke van.)

3. *Határozzuk meg az* **A** *és* **B** *mátrixok Frobenius-, 1-, 2- (spektrális) és ∞-normáját!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{10}$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 3$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 4$. A 2-norma az első szinguláris érték, azaz az $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ legnagyobb sajátértékének négyzetgyöke, ami $\sqrt{10}$.
$\|\mathbf{B}\|_F = \sqrt{4 \cdot 16 + 4 \cdot 4 + 1} = \sqrt{81} = 9$, $\|\mathbf{B}\|_1 = \|\mathbf{B}\|_\infty = 10$, s mivel $\mathbf{B}$ valós szimmetrikus mátrix, a legnagyobb szinguláris értéke megegyezik a spektrálsugarával. Látható, hogy $\mathbf{B}$-nek a 0 kétszeres sajátértéke ($\mathbf{B}$ rangja 1), és így a harmadik a nyomból is kiszámítható: 9. Tehát $\|\mathbf{B}\|_2 = 9$.

4. *Tekintsük az alábbi* $\mathbf{A}$ *mátrix sorterét,* $\mathcal{V}$*-t, és ebben az első két sorvektor által kifeszített alteret,* $\mathcal{W}$*-t. Határozzuk meg a* $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ *faktortér dimenzióját! Adjunk meg a faktortérben egy bázist annak segítségével, hogy kiegészítjük* $\mathcal{W}$ *egy bázisát* $\mathcal{V}$ *egy bázisává!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A sortér bázisát a megadott sorok közül is kiválaszthatjuk, ha oszlopként írva Gauss-eliminációt végzünk rajtuk, és a lépcsős alak vezéroszlopainak megfelelő vektorokat választjuk ki. Mivel itt a $\mathcal{W}$ altér generátorrendszere áll elöl, a kapott bázis ebből kiválasztott elemei a $\mathcal{W}$ bázisát adják meg, a többi ennek direkt kiegészítőjét, és az utóbbiakhoz tartozó mellékosztályok ($\mathcal{W}$ azon vektorokkal való eltoltjai) bázisát adját a $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ vektortérnek.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A vezéroszlopok az 1., 2., 4. és 5., tehát $\mathcal{W}$ 2-dimenziós (ennyi báziselemet választottunk $\mathcal{W}$ elsőként felsorolt generátorrendszeréből), $\dim \mathcal{V} = 4$, és így $\dim \mathcal{V}/\mathcal{W} = 4 - 2 = 2$. $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ báziselemei a 4. és 5. oszlopbeli vektor osztálya: $[(1, 1, 1, 1)]$ és $[(0, 0, 1, 1)]$.

5. *Mutassuk meg, hogy egy* 2×2*-es mátrixhoz annak nyomát rendelő* $M_2[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$ *leképezés lineáris funkcionál! Keressünk egy olyan* $M_2[\mathbb{R}]$*-beli elemet, amellyel való skaláris szorzás épp ezt a funkcionált adja meg, ha a skaláris szorzás a sorfolytonosan írt mátrixoknak mint* $\mathbb{R}^4$*-beli vektoroknak a szokásos euklideszi skalárszorzata.*

Megoldás: Általában $n \times n$-es mátrixokra is igaz, hogy a nyom lineáris funkcionál:
$\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ii} \right) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B})$, és
$\operatorname{tr}(\lambda \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right) = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{A})$.
Olyan $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixot keresünk, amellyel minden $\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ mátrixra $ax + by + cz + du =$

$\mathrm{tr}\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = x + u$, ez pedig az $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$ értékekre, azaz az $\mathbf{I}$ egységmátrixra teljesül.

6. *Mutassuk meg, hogy egy r rangú márix minimálpolinomjának foka legfeljebb $r + 1$.*

Megoldás: Legyen $\mathbf{A}$ $n \times n$-es, és $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$. Ha $r = n$, akkor nyilván igaz az állítás, tehát feltehetjük, hogy $r < n$. Ekkor 0 sajátérték, és $\dim V_0 = n - r$, tehát $\mathbf{A}$ Jordan-normálalakjában $n - r$ darab 0-blokk van. Tehát ha x kitevője a karakterisztikus polinomban a, akkor a maximális 0-blokk mérete, azaz x kitevője a minimálpolinomban $b \leq a - (n - r + 1)$, mivel a többi blokk is legalább 1×1-es. Így $m_{\mathbf{A}}(x)$ foka legföljebb $\deg k_{\mathbf{A}}(x) - (n - r + 1) = n - (n - r + 1) = r + 1$.

7. *Hány olyan páronként nem hasonló, nem diagonalizálható 3×3-as komplex mátrix van, melynek determinánsa 0, és nyoma 1?*

Megoldás: Legyen $\mathbf{A}$ ilyen mátrix. Mivel $\det \mathbf{A} = 0$, a 0 sajátértéke $\mathbf{A}$-nak. Másrészt $\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = 1$, tehát a sajátértékek összege 1. Viszont ha mindegyik sajátértéke különböző lenne, akkor a mátrix diagonalizálható lenne. Tehát a sajátértékek vagy $0, 0, \lambda$, ahol $\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = 1$ miatt $\lambda = 1$, vagy $0, \lambda, \lambda$, ahol $\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = 1$ miatt $\lambda = \frac{1}{2}$. Mivel a mátrix nem diagonalizálható, a Jordan-normálalak a következő kettő egyike.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tehát hasonlóság erejéig csak két ilyen mátrix létezik.